

**ERDÖS – RÉNYI – ZUWÄCHSE
BEI ERNEUERUNGSPROZESSEN
UND PARTIALSUMMEN AUF GITTERN**

HABILITATIONSSCHRIFT

zur Erlangung der *venia legendi*
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von

JOSEF STEINEBACH

aus Meerbusch–Lank

Düsseldorf 1979

**ERDÖS – RÉNYI – ZUWÄCHSE
BEI ERNEUERUNGSPROZESSEN
UND PARTIALSUMMEN AUF GITTERN**

HABILITATIONSSCHRIFT
zur Erlangung der *venia legendi*
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von

JOSEF STEINEBACH
aus Meerbusch–Lank

Düsseldorf 1979

UNIVERSITY OF LEIDEN
LIBRARY
DEPARTMENT OF EAST ASIAN STUDIES

UNIVERSITY OF LEIDEN
LIBRARY
DEPARTMENT OF EAST ASIAN STUDIES



UNIVERSITY OF LEIDEN
LIBRARY
DEPARTMENT OF EAST ASIAN STUDIES

UNIVERSITY OF LEIDEN

I n h a l t

Bezeichnungen und Symbole	5
§ 0 Einleitung	7
 I. <u>ERDÖS-RÉNYI-Zuwächse verallgemeinerter Erneuerungs-</u> <u>prozesse</u>	
§ 1 Vorbemerkungen und Definitionen	15
§ 2 Ergebnisse	19
§ 3 Hilfssätze	24
§ 4 Beweise der Ergebnisse aus § 2	34
 II. <u>ERDÖS-RÉNYI-Zuwächse von Partialsummenprozessen</u> <u>mit mehrdimensionalen Indizes</u>	
§ 5 Vorbemerkungen und Definitionen	42
§ 6 Ergebnisse	47
§ 7 Hilfssätze	49
§ 8 Beweise der Ergebnisse aus § 6	56
 III. <u>Schlußbemerkungen</u>	
§ 9 Zusammenfassung und Ausblicke	59
 Literatur	62

Bezeichnungen und Symbole

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$= \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	$= \{\tau \in \mathbb{R} : \tau > 0\}$
$[0, \infty)$	$= \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$
$[\tau]$	größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich τ ist, $\tau \in \mathbb{R}$
$\forall$	für alle
$\exists$	es existiert (für ein)
$\rightarrow$	konvergiert gegen
$\uparrow$	konvergiert isoton gegen
$\downarrow$	konvergiert antiton gegen
$f(\tau)$	reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}$
$f'(\tau)$	Ableitung von f an der Stelle τ
$f'_+(\tau)$	rechtsseitige Ableitung von f an der Stelle τ
$f''(\tau)$	zweite Ableitung von f an der Stelle τ
$\exp$	Exponentialfunktion
$\log$	Logarithmusfunktion
$\min$	Minimum
$\max$	Maximum
$\inf$	Infimum
$\sup$	Supremum
$\liminf$	Limes inferior
$\limsup$	Limes superior
$\lim$	Limes
$f(\tau) = O(g(\tau)) (\tau \rightarrow \tau_0)$	$\limsup_{\tau \rightarrow \tau_0} \{f(\tau)/g(\tau)\} < \infty$
$f(\tau) = o(g(\tau)) (\tau \rightarrow \tau_0)$	$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \{f(\tau)/g(\tau)\} = 0$
$f(\tau) \sim g(\tau) (\tau \rightarrow \tau_0)$	$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \{f(\tau)/g(\tau)\} = 1$
$(\Omega, \mathcal{A}, P)$	Wahrscheinlichkeitsraum
Ω	Grundmenge
$\mathcal{A}$	σ -Algebra über Ω
P	Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$
f.s.	fast sicher, d.h. gültig auf $A \in \mathcal{A}$ mit $P(A) = 1$

X, Y	reellwertige Zufallsvariable auf Ω
iid	unabhängig, identisch verteilt (<u>in</u> de <u>p</u> endent, <u>i</u> dentically <u>d</u> istributed)
$EX, E(X)$	Erwartungswert von X
$\text{Var}(X)$	Varianz von X
$\text{ess sup } X$	wesentliches Supremum von X $= \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : P(X \leq \alpha) = 1\}$
$\varphi(\tau) = E \exp(\tau X)$	momentenerzeugende Funktion von X
$R(\theta_1, \theta_2)$	Rechteckverteilung über (θ_1, θ_2) ($\theta_1 < \theta_2$)
$N(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$
card	Kardinalität (Mächtigkeit) einer Menge
const	reelle Konstante
$\square$	Ende eines Beweises

§ 0. Einleitung

Betrachtet man Gewinne eines Spielers bei unabhängigen Wiederholungen eines fairen Spiels, also etwa unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable $X_1, X_2, \dots$ mit $P(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$, $i=1, 2, \dots$, so liefern das starke Gesetz der großen Zahlen bzw. das Lemma von BOREL-CANTELLI die folgenden fast sicheren (f.s.) Grenzwertaussagen:

$$(1) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = 0 \quad \text{f.s.} \quad \text{bzw.}$$

$$(2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \max(X_1, \dots, X_N) = 1 \quad \text{f.s.},$$

d.h. der mittlere Gewinn des Spielers in einer langen Spielserie strebt f.s. gegen den erwarteten Gewinn 0 im Einzelspiel, der maximale Gewinn entspricht f.s. dem maximal möglichen Gewinn 1 im Einzelspiel. Beide Aussagen liefern somit charakteristische Parameter des Einzelspiels, d.h. der Verteilung der Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$.

ERDÖS und RÉNYI (1970) schlagen eine Brücke zwischen den Aussagen (1) und (2), indem sie statt des mittleren bzw. maximalen Gewinns in einer langen Spielserie den maximalen mittleren Gewinn aus vergleichsweise kurzen Teilserien untersuchen. Sei dazu

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n=1, 2, \dots \quad \text{und für } 1 \leq K \leq N$$

$$(3) \quad D(N, K) = \max_{0 \leq n \leq N-K} (S_{n+K} - S_n), \quad N = 1, 2, \dots$$

Dann existiert zu jeder Zahl α mit $0 < \alpha < 1$ eine positive Konstante $C = C(\alpha)$ derart, daß gilt:

$$(4) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D(N, [C \log N])}{[C \log N]} = \alpha \quad \text{f.s.},$$

d.h. der maximale mittlere Gewinn aus Teilserien der Länge $K_N = [C \log N]$ strebt f.s. gegen α . Der Beweis zeigt, daß

$K = K_N \sim C \log N$ mit $C > 0$ die richtige Wahl der Teilserienlänge K ist, denn für zu lange Teilserien, d.h. solche mit $K_N / \log N \rightarrow +\infty$ ($N \rightarrow \infty$), erhält man

$$(5) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D(N, K_N)}{K_N} = 0 \quad \text{f.s. ,}$$

speziell für $K_N = N$ also wieder (1), und für zu kurze Teilserien, d.h. $K_N / \log N \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), ergibt sich

$$(6) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D(N, K_N)}{K_N} = 1 \quad \text{f.s. ,}$$

speziell für $K_N = 1$ also wieder (2). Die Aussage (4), die hier für den Fall unabhängiger Wiederholungen eines fairen Spiels formuliert wurde, ist eine Version des sogenannten 'neuen Gesetzes der großen Zahlen' von ERDÖS und RÉNYI, welches in der folgenden allgemeineren Form Gültigkeit besitzt:

A. Satz (ERDÖS-RÉNYI, 1970). Sei $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter, nicht-degenerierter Zufallsvariabler auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\varphi(\tau) = E \exp(\tau X_1) < \infty$ für $\tau \in (0, \tau_0)$, $\tau_0 > 0$.

Dann gilt für $\alpha \in \{\varphi'(\tau) / \varphi(\tau) : \tau \in (0, \tau_0)\}$ und $C = C(\alpha)$ derart, daß $\exp(-1/C) = \inf_{\tau} \varphi(\tau) \exp(-\tau\alpha) = \rho(\alpha)$ die Beziehung

$$(A) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D(N, [C \log N])}{[C \log N]} = \alpha \quad \text{f.s. .}$$

A1. Bemerkung. Die Endlichkeit der zugrundeliegenden momenterzeugenden Funktion $\varphi = \varphi(\tau)$ in einem Intervall $(0, \tau_0)$ ist eine notwendige Voraussetzung im Satz A. Andernfalls erhält man nämlich für jede Konstante $C > 0$:

$$(7) \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{D(N, [C \log N])}{[C \log N]} = +\infty \quad \text{f.s.}$$

(vgl. STEINEBACH (1978a)), d.h. eine Konvergenz im Sinne von (4) ist nicht erreichbar.

A2. Bemerkung. Auch im allgemeinen Fall gelten zu (5) und (6) analoge Beziehungen, nämlich

$$(8) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D(N, K_N)}{K_N} = EX_1 \quad \text{f.s.},$$

$-\infty \leq EX_1 < \infty$, falls $K_N / \log N \rightarrow +\infty$, und

$$(9) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D(N, K_N)}{K_N} = \text{ess sup } X_1 \quad \text{f.s.},$$

$EX_1 < \text{ess sup } X_1 \leq +\infty$, falls $K_N / \log N \rightarrow 0$.

Der Satz von ERDÖS und RÉNYI gibt also durch (A) f.s. Grenzwerte für die geeignet normierten maximalen Zuwächse von Partialsummen an und füllt im Sinne von (8) und (9) die Lücke zwischen dem klassischen starken Gesetz der großen Zahlen und einem Extremwertgesetz für die Folge $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ aus.

Verallgemeinerungen des Satzes von ERDÖS und RÉNYI wurden angegeben von BOOK (1973, 1976) für gewichtete Summen und nicht-identisch verteilte, absolut stetige Summanden, BÁRTEFAI (1977) für stetige Funktionale mehrdimensionaler Partialsummendifferenzen und CSÖRGÖ (1977) für andere als die Summenfunktion von iid Zufallsvariablen und für Funktionen von empirischen Verteilungsfunktionen. BOOK (1975a, 1975b, 1976) hat in weiteren Arbeiten die in (8) und (9) angesprochenen Extrembereiche des Satzes von ERDÖS und RÉNYI genauer untersucht, indem er durch Wahl anderer Normierungsfaktoren hier nichtentartete f.s. Konvergenz erreicht. Zwei Ergebnisse seien hier - der Einfachheit halber für den Fall von iid Zufallsvariablen - dargestellt:

B. Satz (BOOK, 1975b). Sei $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von iid Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $EX_1=0$, $\text{Var}(X_1)=1$ und $\varphi(\tau)=E \exp(\tau X_1) < \infty$ für $|\tau| < \tau_0$. Ferner sei $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine reelle Funktion mit

(B1) $A(x) \uparrow \infty (x \rightarrow \infty)$ streng isoton und stetig;

(B2) $\frac{A(x+1)}{A(x)} \rightarrow 1 (x \rightarrow \infty)$;

(B3) $\frac{A(x)}{\log x} \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty)$;

(B4) $\frac{A(x)}{x} \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$.

Dann gilt für jedes beliebige $\alpha > 0$ mit Bezeichnung (3) und $K_N = [A^{-1}(\frac{2}{\alpha^2} \log N)]$

(B) $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D(N, K_N)}{\sqrt{K_N A(K_N)}} = \alpha \text{ f.s.}$

B1. Bemerkung. Der Satz B fällt in den in (8) angesprochenen Extrembereich des Satzes A. Mit (B4) rechnet man nämlich leicht $K_N / \log N \rightarrow +\infty (N \rightarrow \infty)$ nach.

C. Satz (BOOK, 1976). Sei $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von iid Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $EX_1=0$, $\text{Var}(X_1)=1$ und $\varphi(\tau)=E \exp(\tau X_1) < \infty$ $\forall \tau > 0$, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} (\log \varphi(\tau))' = \infty$, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} (\log \varphi(\tau))'' = \sigma_0^2$, wobei $0 < \sigma_0^2 < \infty$, und $(\log \varphi(\tau))'''$ sei gleichmäßig beschränkt auf $(0, \infty)$. Ferner sei $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine reelle Funktion mit

(C1) $A(x) \uparrow \infty$ streng isoton und stetig ;

$$(C2) \quad \frac{A(x+1)}{A(x)} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \infty) ;$$

$$(C3) \quad \frac{A(x)}{x} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty) .$$

Dann gilt für jedes beliebige $\alpha > 0$ mit (3) und $K_N = [A^{-1}(\frac{2}{\alpha} \sigma_0^2 \log N)]$

$$(C) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D(N, K_N)}{\sqrt{K_N A(K_N)}} = \alpha \quad \text{f.s.}$$

C1. Bemerkung. Der Satz C fällt in den in (9) angesprochenen Extrembereich des Satzes A. Aus (3) folgt nämlich unmittelbar $K_N / \log N \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$.

ERDÖS und RÉNYI geben zwei interessante Anwendungen ihres neuen Gesetzes der großen Zahlen an:

Anwendung 1. Liegt statt des Partialsummenprozesses $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

nur ein fehlerhaft beobachteter Prozeß vor, etwa $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$,

wobei $T_n = S_n + R_n$, $n=1, 2, \dots$, und sind die Fehlervariablen R_n beschränkt, etwa $|R_n| \leq r_n$, so bleibt die Aussage (A) des Satzes A in unveränderter Form auch für die Folge $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gültig, wenn

nur $r_n = o(\log n)$ gilt. Wegen (A) und der Relation $\exp(-1/C) = \inf_{\tau} \varphi(\tau) \exp(-\tau\alpha)$ ist somit durch $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ f.s. der funktionale

Zusammenhang $C = C(\alpha)$ bestimmt, der es andererseits wieder erlaubt, die momenterzeugende Funktion $\varphi = \varphi(\tau)$ in einem Intervall von τ -Werten zu berechnen. Die Folge $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ legt somit -

selbst bei Fehlern in der Größenordnung $o(\log n)$ - mit Wahrscheinlichkeit 1 die zugrundeliegende Verteilung fest. Der Satz A liefert damit eine Lösung des 'stochastischen Geysir-Problems', welches von A. RÉNYI (1962) für den Fall $T_n = [S_n]$ aufgestellt wurde. Eine erste - allerdings aufwendigere - Lösung findet man bei BARTFAI (1966).

Anwendung 2. Ist $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch $N(0,1)$ -verteilter Zufallsvariablen, so gilt $\varphi(\tau) = \exp(-\tau^2/2) \forall \tau \in \mathbb{R}$ und $\rho(\alpha) = \inf_{\tau} \varphi(\tau) \exp(-\tau\alpha) = \exp(-\alpha^2/2) \forall \alpha > 0$.
Wegen $\exp(-1/C) = \rho(\alpha)$ erhält man $\alpha = \sqrt{2/C} \quad \forall C > 0$ und (A) lautet für diesen Spezialfall

$$(10) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D(N, [C \log N])}{[C \log N]} = \sqrt{\frac{2}{C}} \quad \text{f.s. } \forall C > 0.$$

Aus (10) kann das folgende, auf P. LÉVY (1937) zurückgehende Ergebnis für eine BROWNSche Bewegung $\{W(t)\}_{t \in [0,1]}$ über dem Intervall $[0,1]$ abgeleitet werden:

$$(11) \quad \lim_{h \rightarrow 0} P\left(\sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{W(t+h) - W(t)}{\sqrt{2h \log(1/h)}} - 1 \geq \varepsilon\right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Die Aussage (11) läßt sich als schwache Konvergenzaussage verbessern zu

$$(12) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{W(t+h) - W(t)}{\sqrt{2h \log(1/h)}} = 1 \quad \text{f.s.}$$

und liefert den sogenannten LÉVY-Stetigkeitsmodul der BROWNSchen Bewegung. Wegen des Zusammenhangs mit Satz A spricht man auch von ERDÖS-RÉNYI-Zuwächsen des Prozesses $\{W(t)\}_{t \in [0,1]}$.

Mit den genannten Anwendungsbeispielen bietet der Satz von ERDÖS und RÉNYI somit zwei wichtige Möglichkeiten: Er gestattet es einerseits, aus Realisationen von Partialsummenfolgen - selbst bei Beobachtungsfehlern - mit Wkt. 1 auf zugrundeliegende Verteilungen zu schließen, und ermöglicht es andererseits - ausgehend von Partialsummenprozessen - die maximalen Zuwächse anderer Prozesse (wie etwa der BROWNSchen Bewegung) f.s. zu charakterisieren.

Beide Möglichkeiten sind in der neueren Literatur in ausgiebiger Weise weiterentwickelt worden. Überblicke findet man bei S.CSÖRGÖ (1977) und M.CSÖRGÖ und A.H.C.CHAN (1976).

Alle Arbeiten über die ERDÖS-RÉNYI-Zuwächse bestimmter Prozesse basieren hierbei auf zwei wesentlichen Punkten:

1. Der zu untersuchende Prozeß besitzt unabhängige und i.a. auch stationäre Zuwächse, oder er läßt sich durch einen solchen Prozeß hinreichend gut approximieren (vgl. DEO (1976))

und

2. Der Prozeß zeigt (zumindest einseitig) ein exponentielles Konvergenzverhalten im Gesetz der großen Zahlen.

Auf Punkt 2 kann i.a. nicht verzichtet werden. Bei Partialsummen ist nämlich ein exponentielles Konvergenzverhalten im Gesetz der großen Zahlen äquivalent zur Endlichkeit der gemeinsamen momenterzeugenden Funktion $\phi(\tau)$ in einem Intervall von τ -Werten (vgl. BAUM, KATZ, READ (1962), PETROV, ŠIROKOVA (1973)). Bemerkung A1 weist daher auf die Notwendigkeit hin.

In der vorliegenden Arbeit werden analoge Ergebnisse zu den Sätzen A - C hergeleitet für verallgemeinerte Erneuerungsprozesse (Kapitel I) und Partialsummenprozesse auf einem mehrdimensionalen Gitter - etwa $\mathbb{N}^d$ - (Kapitel II).

Mit den Erneuerungsprozessen werden somit Prozesse untersucht, die i.a. keine unabhängigen und stationären Zuwächse besitzen. Dies macht andere als die bisher bekannten Beweismethoden erforderlich. Wichtiges Hilfsmittel ist hier die Unabhängigkeit des Prozesses zwischen den 'zufälligen' Erneuerungszeitpunkten. Ein erster Ansatz zu Untersuchungen dieser Art wurde in STEINEBACH (1978b) gemacht. Das dort angegebene Ergebnis stellt ein Analogon zu Satz A dar für gewöhnliche Erneuerungsprozesse.

In Kapitel II werden die Sätze A - C auf Partialsummenprozesse auf $\mathbb{N}^d$ verallgemeinert. Allerdings werden die Bedingungen (B1) - (B4) und (C1) - (C3) ersetzt durch solche, die sich unmittelbar auf die Folge $\{K_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ der Teilserienlängen beziehen. Dies ermöglicht einen direkteren Zugang und ist einsichtiger. Die angegebenen Sätze sind z.B. im Spezialfall $N(0,1)$ -verteilter Zufallsvariablen wesentliche Hilfsmittel bei der Untersuchung der ERDÖS-RÉNYI Zuwächse der BROWNSchen Bewegung mit mehrdimensionalem 'Zeitparameter' (vgl. CHAN (1976, 1977)).

Alle Sätze basieren auf Ergebnissen aus der Theorie der exponentiellen Konvergenz von Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen, die teilweise bekannt sind (vgl. STEINEBACH (1976)) oder aus bekannten Ergebnissen abgeleitet werden können. Weitere Hilfsmittel sind exponentielle Abschätzungen und das Lemma von BOREL-CANTELLI .

Zur Bezeichnungsweise sei noch folgendes bemerkt: Zusammengehörende Sätze, Hilfssätze, Bedingungen etc. sind zur Verdeutlichung mit denselben Buchstaben versehen worden, z.B. Satz 2A, Hilfssatz 3A, Bedingung (IA) etc. . Eine Unterscheidung zwischen Hilfssatz und Lemma wurde vorgenommen, weil die bewiesenen Sätze unmittelbar auf den zugehörigen Hilfssätzen basieren, Lemmata jedoch hauptsächlich zum Beweis der Hilfssätze herangezogen werden.

I. ERDÖS-RÉNYI-Zuwächse verallgemeinerter Erneuerungsprozesse

§1 Vorbemerkungen und Definitionen

Im folgenden ist $X_1, X_2, \dots$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

- (i) $EX_1 = \mu > 0$,
- (ii) $\text{Var}(X_1) = \sigma^2 > 0$ und
- (iii) $E|X_1|^3 = \mu_3 < \infty$.

Sei $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ und $M_n = \max(S_0, S_1, \dots, S_n)$. In Anlehnung an HEYDE (1967) setzen wir für $t \in [0, \infty)$

$$(1.1) \quad N(t) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : M_n \leq t\}$$

und

$$(1.2) \quad L(t) = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n > t\}$$

1.1. Definition. Der Prozeß $\{N(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ heißt verallgemeinerter Erneuerungsprozeß. Die Zufallsvariable $L(t)$ heißt Erstaustrittszeit der Folge $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus dem Intervall $(-\infty, t]$.

1.2. Bemerkung. Wegen $EX_1 = \mu > 0$ gilt für alle $t \geq 0$:

$$(1.3) \quad P(N(t) < \infty) = P(L(t) < \infty) = 1,$$

d.h. die betrachteten Zufallsvariablen sind fast sicher (f.s.) endlich. Aus den Festlegungen (1.1) und (1.2) folgt sofort

$$(1.4) \quad L(t) = N(t) + 1$$

und für $n \in \mathbb{N}_0$

$$(1.5) \quad P(N(t) \geq n) = P(M_n \leq t)$$

$$(1.6) \quad P(N(t) = n) = P(M_n \leq t, M_{n+1} > t) = P(S_1, \dots, S_n \leq t, S_{n+1} > t) .$$

1.3. Bemerkung. Im Fall nicht-negativer Zufallsvariablen, also $X_i \geq 0$, $i \in \mathbb{N}$, können die X_i als 'zufällige' Abstände zwischen 'Erneuerungen' auf einer positiven Zeitachse angesehen werden. Es gilt dann

$$(1.7) \quad N(t) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n \leq t\} ,$$

d.h. die Zufallsvariable $N(t)$ gibt die Anzahl der Erneuerungen an, die bis zur Zeit t stattfinden.

In Analogie zu den Aussagen der Sätze A - C der Einleitung sollen in diesem Kapitel die maximalen Zuwächse des verallgemeinerten Erneuerungsprozesses $\{N(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ charakterisiert werden. Wir definieren dazu:

1.4. Definition. Für $T > 0$ und $0 < K < T$ heißt die Zufallsvariable

$$(1.8) \quad D(T, K) = \sup_{0 \leq t \leq T-K} \{N(t+K) - N(t)\}$$

ERDÖS-RÉNYI (E-R)-Zuwachs des Prozesses $\{N(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ im Intervall $(0, T]$ über (linksoffenen) Teilintervallen der Länge K .

Das asymptotische Verhalten für $T \rightarrow \infty$ von E-R-Zuwächsen $D(T, K_T)$ des Prozesses $\{N(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ hängt ab von der Wahl der Familie $\{K_T\}_{T \in (0, \infty)}$, die die Länge der Teilintervalle bestimmt, über denen maximale Zuwächse untersucht werden. Wie bei den Partialsummen gibt es auch hier drei wesentlich verschiedene Fälle:

$$(IA) \quad K_T / \log T \rightarrow C \in \mathbb{R}_+ \quad (T \rightarrow \infty)$$

$$(IB) \quad K_T / \log T \rightarrow \infty \quad (T \rightarrow \infty)$$

$$(IC) \quad K_T / \log T \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty) \quad .$$

Folgende Bedingungen an $\{K_T\}_{T \in (0, \infty)}$ werden von Bedeutung sein:

$$(I1) \quad K_T \uparrow \infty \quad (T \rightarrow \infty) \quad \text{isoton} \quad .$$

$$(I2) \quad K_T / T^{\delta} \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty) \quad \forall \delta > 0 \text{ und diese Konvergenz ist antiton f\"ur ein } \delta_0 > 0 \quad .$$

$$(I3) \quad \text{F\"ur } \{T_j\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ mit } T_j = \sup\{T : K_T \leq j\} \text{ gilt:}$$

$$\log T_{j+1} / \log T_j \rightarrow 1 \quad (j \rightarrow \infty) \quad .$$

1.5. Bemerkung. Typische Beispiele von Familien $\{K_T\}_{T \in (0, \infty)}$, die den Bedingungen (I1) - (I3) gen\"ugen, erh\"alt man durch die Festsetzung $K_T = (\log T)^{\kappa}$ mit $\kappa \in \mathbb{R}_+$.

1.6. Bemerkung. Die Bedingungen (I1) - (I3) implizieren die Stetigkeit von $\{K_T\}_{T \in (0, \infty)}$ sowie die folgenden n\"utzlichen Eigenschaften:

$$(1.9) \quad K_{T+1} - K_T \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty)$$

$$(1.10) \quad K_{T+1} / K_T \rightarrow 1 \quad (T \rightarrow \infty)$$

$$(1.11) \quad \log T_j / \log j \rightarrow \infty \quad (j \rightarrow \infty)$$

$$(1.12) \quad \log T_j / j \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty) \quad , \text{ falls (IB) gilt} \quad .$$

Hierbei folgt die Stetigkeit unmittelbar aus (I1) und (I2); (1.9) und (1.10) erhält man aus (I2), (1.11) ebenfalls aus (I2), wenn man $K_{T_j} = j$ beachtet, und (1.12) aus (IB), wieder unter Beachtung von $K_{T_j} = j$.

1.7. Bemerkung. Die Bedingung (I1) entspricht (B1) bzw. (C1) in den Sätzen B und C der Einleitung, (I2) ersetzt (B3), (I3) steht für (B2) bzw. (C2), (IB) nimmt den Platz von (B4) ein und (IC) den von (C3).

Nach diesen Vorbemerkungen können wir im folgenden Paragraphen die Ergebnisse über E-R-Zuwächse verallgemeinerter Erneuerungsprozesse formulieren.

§ 2. Ergebnisse

Das erste Ergebnis überträgt das neue Gesetz der großen Zahlen von ERDÖS und RÉNYI auf den in § 1 definierten Erneuerungsprozeß $\{N(t)\}_{t \in [0, \infty)}$.

2A. Satz. Außer den Voraussetzungen (i) - (iii) (§1) gelte noch

$$(iv) \quad \varphi(\tau) = E \exp(\tau X_1) < \infty, \quad \tau \in (\tau_1, 0], \quad \tau_1 < 0.$$

Dann gilt für $\alpha \in \{(g(e^\xi))' : \xi \in (0, \log \frac{1}{\rho})\}$, wobei

$$g(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E x^{N(t)}, \quad \rho = \inf\{\varphi(\tau) : \tau \in (\tau_1, 0)\} \text{ und } C = C(\alpha) \text{ derart,}$$

daß $\exp(-1/C) = \inf_{\xi} \exp\{g(e^\xi) - \xi\alpha\} = \rho(\alpha)$, die Beziehung

$$(2A) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(T, C \log T)}{C \log T} = \alpha \quad \text{f.s.}$$

Hierbei kann $\{C \log T\}_{T \in (0, \infty)}$ noch ersetzt werden durch eine Familie $\{K_T\}_{T \in (0, \infty)}$ positiver reeller Zahlen, die den Bedingungen (I1), (I2) und (IA) genügt mit $C = C(\alpha)$.

2.1. Bemerkung. Wie in Anwendung 1 des Satzes von ERDÖS und RÉNYI liefert auch der Erneuerungsprozeß $\{N(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ f.s. den durch $\exp(-1/C) = \inf_{\xi} \exp\{g(e^\xi) - \xi\alpha\} = \rho(\alpha)$ festgelegten funktionalen Zusammenhang $C = C(\alpha)$, selbst wenn statt $N(t)$ lediglich $M(t) = N(t) + R(t)$ vorliegt mit beschränkten Fehlervariablen $R(t)$, genauer $|R(t)| \leq r(t) = o(\log t)$.

Dies gestattet es auch hier, mit Wahrscheinlichkeit 1 die moment-erzeugende Funktion $\varphi = \varphi(\tau)$ in einem Intervall von τ -Werten zu bestimmen. Dazu beachte man, daß gilt:

$$(2.1) \quad g\left(\frac{1}{\varphi(\tau)}\right) = -\tau \quad \text{für } \tau \in (\tau_1, 0) \text{ mit } \varphi'(\tau) > 0,$$

(2.2) $g(e^{\xi})$ ist streng konvex in $(0, \log \frac{1}{\rho})$,

(vgl. Bemerkung 3.3 in §3) sowie

2.2. Lemma. Sei $c : (0, \tau_0) \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng konvexe Funktion, die in $(0, \tau_0)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Für $\alpha \in \{c'(\tau) : \tau \in (0, \tau_0)\}$ setze man $\rho(\alpha) = \inf_{\tau} \exp\{c(\tau) - \tau\alpha\}$. Dann gilt:

a) $\rho(\alpha)$ ist darstellbar in der Form

$$(2.3) \quad \rho(\alpha) = \exp\{c(\tau(\alpha)) - \alpha\tau(\alpha)\},$$

wobei $\tau(\alpha)$ die einzige Lösung von $\alpha = c'(\tau)$ ist.

b) $\rho = \rho(\alpha)$ ist streng antiton in (α_0, α_1) , wobei $\alpha_0 = \inf\{c'(\tau) : \tau \in (0, \tau_0)\}$ und $\alpha_1 = \sup\{c'(\tau) : \tau \in (0, \tau_0)\}$.

c) Die durch $c'(\tau) = \alpha$ implizit definierte Funktion $\tau = \tau(\alpha)$ ist streng isoton in (α_0, α_1) .

d) $-\log \rho(\alpha)$ ist differenzierbar in (α_0, α_1) , und es ist

$$(2.4) \quad (-\log \rho(\alpha))' = \tau(\alpha), \quad \alpha \in (\alpha_0, \alpha_1).$$

e) Mit der Inversen $\alpha = \alpha(\tau)$ zu $\tau = \tau(\alpha)$ erhält man:

$$(2.5) \quad c(\tau) = \log \rho(\alpha(\tau)) + \tau\alpha(\tau), \quad \tau \in (0, \tau_0).$$

Beweis. a) (2.3) folgt aus der strengen Konvexität von c .

c) Die durch $\alpha = c'(\tau)$ implizit definierte Funktion $\tau = \tau(\alpha)$ ist differenzierbar in (α_0, α_1) mit $\tau'(\alpha) = 1/c''(\tau(\alpha))$. Wegen $c''(\tau) > 0$ folgt hieraus die strenge Isotonie von $\tau = \tau(\alpha)$.

- d) Aus (2.3) erhält man $-\log \rho(\alpha) = \alpha \tau(\alpha) - c(\tau(\alpha))$ und
 $(-\log \rho(\alpha))' = \tau'(\alpha) \{\alpha - c'(\tau(\alpha))\} + \tau(\alpha) = \tau(\alpha)$, also (2.4) .
- b) Wegen $\tau(\alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ folgt die Behauptung aus (2.4) .
- e) Mit $\tau(\alpha(\tau)) = \tau$ folgt (2.5) unmittelbar aus (2.3) . $\square$

Erhält man nun nach Satz 2A mit Wahrscheinlichkeit 1 den funktionalen Zusammenhang zwischen α und $C = C(\alpha)$ in einem Intervall von α -Werten, etwa (α_0, α_1) mit $\alpha_0 = \inf \{ (g(e^\xi))' : \xi \in (0, \log \frac{1}{\rho}) \}$, $\alpha_1 = \sup \{ (g(e^\xi))' : \xi \in (0, \log \frac{1}{\rho}) \}$, so läßt sich hieraus $\rho(\alpha) = \inf_{\xi} \exp \{ g(e^\xi) - \xi \alpha \} = \exp (-1/C(\alpha))$ bestimmen und somit - unter Beachtung von (2.2) und Lemma 2.2 - auch die Funktion $g = g(e^\xi)$ in einem Intervall von ξ -Werten, d.h. für $\xi \in (0, \log \frac{1}{\rho})$. Wegen (2.1) ist damit aber auch die momenterzeugende Funktion $\varphi = \varphi(\tau)$ auf der Menge $\{ \tau \in (\tau_1, 0) : \varphi'(\tau) > 0 \}$ bestimmt und mit ihr die zugrundeliegende Verteilung. Dies besagt, daß auch für den verallgemeinerten Erneuerungsprozeß - ähnlich wie bei den Partialsummen - ein 'stochastisches Geysir-Problem' lösbar ist, d.h. daß auch eine Realisation des Prozesses $\{N(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ - selbst bei Vorliegen von Beobachtungsfehlern in der Größenordnung $o(\log t)$ - f.s. die Verteilung der Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ bestimmt. Satz 2A gewinnt daher besonders in solchen Fällen an Bedeutung, in denen man keinen direkten Zugang zum Partialsummenprozeß $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ hat, wohl aber den Erneuerungsprozeß $\{N(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ registrieren kann (wie z.B. beim radioaktiven Zerfall).

Die beiden folgenden Sätze untersuchen analog zu den Sätzen B und C der Einleitung die beiden Extrembereiche für die Konvergenz der ERDÖS-RÉNYI-Zuwächse $D(T, K_T)$ des verallgemeinerten Erneuerungsprozesses, nämlich für $K_T / \log T \rightarrow +\infty$ ($T \rightarrow \infty$) bzw. $K_T / \log T \rightarrow 0$ ($T \rightarrow \infty$) .

2B. Satz. Außer den Voraussetzungen (i) - (iii) (§1) gelte
 (iv) $\varphi(\tau) = E \exp(\tau X_1) < \infty$, $\tau \in (\tau_1, 0]$, $\tau_1 < 0$.

Ferner sei $\{K_T\}_{T \in (0, \infty)}$ eine Familie positiver reeller Zahlen, die den Bedingungen (I1) - (I3) und (IB) genügt. Dann gilt

$$(2B) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(T, K_T) - K_T/\mu}{\sqrt{K_T \log T}} = \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\mu^3}} \quad \text{f.s.} \quad .$$

2.3. Bemerkung. Für $K_T/\log T \rightarrow +\infty$ liefert der Satz 2B noch folgende Ergänzung des Satzes 2A:

$$(2.6) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(T, K_T)}{K_T} = \frac{1}{\mu} \quad \text{f.s.}$$

2C. Satz. Außer den Voraussetzungen (i) - (iii) (§1) gelte noch

(iv) $\varphi(\tau) = E \exp(\tau X_1) < \infty$, $\tau \in (\tau_1, 0]$, $\tau_1 < 0$, und

(v) $\varphi'(\tau_0) = 0$ für ein $\tau_0 \in (\tau_1, 0)$.

Sei $\rho = \inf_{\tau} \varphi(\tau) = \varphi(\tau_0)$ und $\{K_T\}_{T \in (0, \infty)}$ eine Familie reeller Zahlen, die den Bedingungen (I1) - (I3) und (IC) genügt. Dann gilt

$$(2C) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(T, K_T)}{\log T} = \frac{1}{\log \frac{1}{\rho}} \quad \text{f.s.} \quad .$$

2.4. Bemerkung. Für $K_T/\log T \rightarrow 0$ ergänzt Satz 2C die Aussage (2A) durch die Relation

$$(2.7) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(T, K_T)}{K_T} = +\infty \quad \text{f.s.}$$

Die Aussagen (2.6) und (2.7) zeigen, daß auch beim verallgemeinerten Erneuerungsprozeß $K_T \sim C \log T$ die richtige Wahl der Normierungskonstanten ist, um die Gültigkeit eines neuen Gesetzes der großen Zahlen im Sinne von ERDÖS und RËNYI zu sichern.

Die Sätze 2A - 2C basieren auf Konvergenzeigenschaften der Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen des Prozesses $\{N(t)\}_{t \in [0, \infty)}$, die im folgenden Paragraphen hergeleitet werden.

§ 3. Hilfssätze

Der Satz 2A basiert auf dem folgenden Ergebnis:

3A. Hilfssatz. Unter den Voraussetzungen von Satz 2A gelten für jede Familie $\{\alpha_K\}_{K \in (0, \infty)}$ reeller Zahlen mit $\alpha_K \rightarrow \alpha$

$\in \{(g(e^\xi))' : \xi \in (0, \log \frac{1}{\rho})\}$, wobei $g(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E x^{N(t)}$ und

$\rho = \inf_{\tau \in (\tau_1, 0)} \varphi(\tau)$, die Beziehungen

$$\begin{aligned} (3A) \quad & \lim_{K \rightarrow \infty} \{P(N(K) - N(0) \geq K\alpha_K)\}^{1/K} \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \{P(N(K) \geq K\alpha_K)\}^{1/K} \\ &= \inf_{\xi} \exp\{g(e^\xi) - \xi\alpha\} = \rho(\alpha) . \end{aligned}$$

Zum Beweis benötigen wir die folgenden beiden Lemmata:

3.1. Lemma. Sei $\{W(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ ein reellwertiger stochastischer Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{O}, P)$ mit

$$(3.1) \quad \varphi_t(\tau) = E \exp(\tau W(t)) < \infty, \quad \tau \in [0, \tau_0), \quad \tau_0 > 0,$$

$$\begin{aligned} (3.2) \quad & \lim_{t \rightarrow \infty} k_t^{-1} \log \varphi_t(\tau) = c(\tau) \in \mathbb{R}, \quad \tau \in (0, \tau_0), \\ & \text{wobei } \{k_t\}_{t \in [0, \infty)} \text{ eine Familie positiver reeller Zahlen} \\ & \text{ist mit } k_t \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

$$(3.3) \quad c(\tau) \text{ ist streng konvex in } (0, \tau_0) .$$

Dann gilt für jede Familie $\{\alpha_t\}_{t \in [0, \infty)}$ reeller Zahlen mit

$\alpha_t \rightarrow \alpha \in \{c'_+(\tau) : \tau \in (0, \tau_0)\}$ die Beziehung

$$(3.4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \{P(W(t) \geq k_t \alpha_t)\}^{1/k_t} = \inf_{\tau} \exp\{c(\tau) - \tau \alpha\} \\ = \exp\{c(\tau(\alpha)) - \alpha \tau(\alpha)\} ,$$

wobei $\tau(\alpha)$ die einzige Lösung von $\alpha = c'_+(\tau)$ ist. $c'_+(\tau)$ bezeichnet hier die rechtsseitige Ableitung der konvexen Funktion $c(\tau)$ an der Stelle τ .

Lemma 3.1 ist die verallgemeinerte und (hinsichtlich des Index) stetige Version eines Satzes über Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen von PLACHKY und STEINEBACH (1975). Einen Beweis findet man bei STEINEBACH (1976, Sätze 1.1.1 und 3.1.1).

Ferner gilt für die Erstaustrittszeiten $L(t)$:

3.2 Lemma. Unter den Voraussetzungen des Satzes 2A erhält man für $\tau \in \{\tau \in (\tau_1, 0) : \varphi'(\tau) > 0\}$:

$$(3.5) \quad E e^{\tau S_L(t)} \left\{ \frac{1}{\varphi(\tau)} \right\}^{L(t)} = 1 \quad \text{und}$$

$$(3.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log E \left\{ \frac{1}{\varphi(\tau)} \right\}^{L(t)} = -\tau .$$

Beweis. Die bei STEINEBACH (1978b) für den gewöhnlichen Erneuerungsprozeß angestellten Überlegungen lassen sich i.w. übertragen. Mit $S_n = X_1 + \dots + X_n$ und $S_{L(t)} = X_1 + \dots + X_{L(t)}$ erhält man

$$(3.7) \quad \varphi^n(\tau) = E \exp(\tau S_n) = E \exp\left(\tau S_{L(t)} + \tau (S_n - S_{L(t)})\right) \\ = \int_{\{L(t) \leq n\}} \exp(\tau S_n) dP + \int_{\{L(t) > n\}} \exp(\tau S_n) dP .$$

Wegen $\{L(t) = v\} = \{S_1, \dots, S_{v-1} \leq t, S_v > t\}$ folgt für das erste Integral

$$(3.8) \quad \int_{\{L(t) \leq n\}} \exp(\tau S_{L(t)} + \tau(S_n - S_{L(t)})) dP = \sum_{v=1}^n \int_{\{L(t)=v\}} \exp(\tau S_v + \tau(S_n - S_v)) dP$$

$$= \sum_{v=1}^n \int_{\{L(t)=v\}} \exp(\tau S_v) \varphi(\tau) n^{-v} dP = \varphi^n(\tau) \int_{\{L(t) \leq n\}} \exp(\tau S_{L(t)}) \left\{ \frac{1}{\varphi(\tau)} \right\}^{L(t)} dP$$

Wegen $EX_1 > 0$ gilt ferner für jedes feste $t > 0$

$$(3.9) \quad I_{\{L(t) \leq n\}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{f.s.} \quad .$$

Beachtet man, daß $\int_{\{L(t) > n\}} \frac{e^{\tau S_n}}{\varphi^n(\tau)} dP \leq \int_{\{S_n \leq t\}} \frac{e^{\tau S_n}}{\varphi^n(\tau)} dP = P(\bar{S}_n \leq t)$

gilt, wobei $\bar{S}_n = \bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_n$ und die $\bar{X}_i$ iid sind mit zu X_1 konjugierten Verteilungen, d.h. $P(\bar{X}_1 \in A) = \int_A \frac{\exp(\tau X_1)}{\varphi(\tau)} dP$, so folgt

wegen $E\bar{X}_1 = \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} > 0$ noch

$$(3.10) \quad \int_{\{L(t) > n\}} \frac{e^{\tau S_n}}{\varphi^n(\tau)} dP \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad .$$

(3.8) - (3.10) liefern zusammen (3.5). (3.6) erhält man mit denselben Überlegungen wie beim gewöhnlichen Erneuerungsprozeß.

□

3.3. Bemerkung. Sei wieder $\rho = \inf\{\varphi(\tau) : \tau \in (\tau_1, 0)\}$. Durch die Relation (3.6) ist auf $(1, \frac{1}{\rho})$ die Funktion $g(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log Ex^N(t)$ eindeutig definiert, nämlich

$$g(x) = -\tau \quad \text{für} \quad x = \frac{1}{\varphi(\tau)} \quad (\tau < 0, \varphi'(\tau) > 0) \quad .$$

Wir zeigen, daß durch die Zuordnung $\xi \rightarrow g(e^\xi)$ eine streng konvexe Funktion auf $(0, \log \frac{1}{\rho})$ festgelegt ist. Es ist nämlich

$$g'(x) = \frac{\varphi^2(\tau)}{\varphi'(\tau)} \quad \text{für} \quad x = \frac{1}{\varphi(\tau)}$$

und folglich

$$(3.11) \quad \left(g(e^\xi) \right)' = \frac{\varphi(\tau)}{\varphi'(\tau)} \quad \text{für} \quad e^\xi = \frac{1}{\varphi(\tau)}.$$

Da die Verteilung der X_i keine Punktverteilung ist, ist $\log \varphi(\tau)$ streng konvex und somit $\varphi'(\tau)/\varphi(\tau)$ streng isoton. (3.11) liefert daher die strenge Isotonie von $\left(g(e^\xi) \right)'$ auf $(0, \log \frac{1}{\rho})$, was gleichbedeutend ist mit der strengen Konvexität von $g(e^\xi)$ auf $(0, \log \frac{1}{\rho})$.

Beweis von Hilfssatz 3A. Der Einfachheit der Schreibweisen halber führen wir den Beweis für $L(K) - L(0)$ bzw. $L(K)$. Wegen $L(t) = N(t) + 1$ ($t \geq 0$) ist damit auch der Beweis von (3A) erbracht.

Unter Beachtung von Bemerkung 3.3 folgt aus (3.6) und Lemma 3.1 sofort

$$(3.12) \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \{P(L(K) \geq K\alpha_K)\}^{1/K} = \inf_{\xi} \exp\{g(e^\xi) - \xi\alpha\}.$$

Ferner gelten die Abschätzungen

$$(3.13) \quad P(L(K) - L(0) \geq K\alpha_K) \leq P(L(K) \geq K\alpha_K)$$

und für $0 < K_0 < K$

$$\begin{aligned} P(L(K) - L(0) \geq K\alpha_K) &\geq P(L(K) - L(0) \geq [K\alpha_K] + 1) \\ &= P(S_{L(0)}, S_{L(0)} + X_{L(0)+1}, \dots, S_{L(0)} + X_{L(0)+1} + \dots + X_{L(0)+[K\alpha_K]} \leq K) \\ &\geq P(S_{L(0)}, \dots, S_{L(0)} + X_{L(0)+1} + \dots + X_{L(0)+[K\alpha_K]} \leq K, X_{L(0)} \leq K_0). \end{aligned}$$

Beachtet man $S_{L(0)} = S_{L(0)-1} + X_{L(0)}$ und $S_{L(0)-1} \leq 0$, so erhält man weiter

$$\begin{aligned} P(L(K) - L(0) \geq K\alpha_K) &\geq P(X_{L(0)+1}, \dots, X_{L(0)+1} + \dots + X_{L(0)+[K\alpha_K]} \leq K - K_0, X_{L(0)} \leq K_0) \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} P(X_{v+1}, \dots, X_{v+1} + \dots + X_{v+[K\alpha_K]} \leq K - K_0, X_v \leq K_0, L(0)=v). \end{aligned}$$

Da die X_i iid sind und $\{L(0)=v\} \in \mathcal{O}(X_1, \dots, X_v)$, folgt weiter

$$(3.14) \quad P(L(K) - L(0) \geq K\alpha_K)$$

$$\begin{aligned} &\geq P(S_1, \dots, S_{[K\alpha_K]} \leq K - K_0) \sum_{v=1}^{\infty} P(X_v \leq K_0, L(0) = v) \\ &= P(L(K - K_0) \geq [K\alpha_K] + 1) P(X_{L(0)} \leq K_0) . \end{aligned}$$

K_0 kann so festgesetzt werden, daß $P(X_{L(0)} \leq K_0) > 0$ gilt. Mit (3.12) folgt aus (3.13) und (3.14) somit auch

$$(3.15) \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \{P(L(K) - L(0) \geq K\alpha_K)\}^{1/K} = \inf_{\xi} \exp \{g(e^{\xi}) - \xi\alpha\} ,$$

womit der Beweis vollständig ist. $\square$

Hilfssatz 3A ist ein Satz über Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen des verallgemeinerten Erneuerungsprozesses im Bereich $K\alpha_K \sim K\alpha$ für bestimmte α -Werte.

Die Sätze 2B und 2C basieren entsprechend auf Sätzen über Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen für Bereiche $\frac{K}{\mu} + \alpha_K \sqrt{KA(K)}$ mit $\alpha_K \rightarrow \alpha > 0$ und $A(K)/K \rightarrow 0$ bzw. $\alpha_K \sqrt{KA(K)}$ mit $\alpha_K \rightarrow \alpha > 0$ und $A(K)/K \rightarrow \infty$.

3B.Hilfssatz. Es sei $\{A(K)\}_{K \in (0, \infty)}$ eine Familie reeller Zahlen mit $A(K) \rightarrow \infty$ und $A(K)/K \rightarrow 0$ ($K \rightarrow \infty$). Unter den Voraussetzungen von Satz 2B gelten dann für jede Familie $\{\alpha_K\}_{K \in (0, \infty)}$ reeller Zahlen mit $\alpha_K \rightarrow \alpha > 0$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} (3B) \quad &\lim_{K \rightarrow \infty} \{P(N(K) - N(0) - \frac{K}{\mu} \geq \alpha_K \sqrt{KA(K)})\}^{1/A(K)} \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \{P(N(K) - \frac{K}{\mu} \geq \alpha_K \sqrt{KA(K)})\}^{1/A(K)} \\ &= \exp\left(-\frac{\alpha^2 \mu^3}{2 \sigma^2}\right) = \rho(\alpha) . \end{aligned}$$

Beweis. Wir führen den Beweis wieder für $L(K) - L(0)$ bzw. $L(K)$.

Mit $a_K = \left[\frac{K}{\mu} + \alpha_K \sqrt{KA(K)} \right]$ gelten die folgenden Abschätzungen

$$\begin{aligned}
 (3.16) \quad & P(L(K) \geq \frac{K}{\mu} + \alpha_K \sqrt{KA(K)}) \geq P(L(K) \geq a_K + 1) \\
 & = P(M_{a_K} \leq K) = P(M_{a_K} - a_K \mu \leq K - a_K \mu) \\
 & \geq P(M_{a_K} - a_K \mu \leq -\mu \alpha_K \sqrt{KA(K)}) \\
 & = P(S_{a_K} - a_K \mu + M_{a_K} - S_{a_K} \leq -\mu \alpha_K \sqrt{KA(K)}) \\
 & \geq P(S_{a_K} - a_K \mu \leq -(\mu \alpha_K + \epsilon) \sqrt{KA(K)}) - P(M_{a_K} - S_{a_K} \geq \epsilon \sqrt{KA(K)}),
 \end{aligned}$$

wobei $\epsilon > 0$ fest gewählt wird. Es werden zunächst die Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}
 & P(S_{a_K} - a_K \mu \leq -(\mu \alpha_K + \epsilon) \sqrt{KA(K)}) \\
 & = P\left(-\frac{S_{a_K} - a_K \mu}{\sigma} \geq \frac{\mu \alpha_K + \epsilon}{\sigma} \sqrt{KA(K)}\right)
 \end{aligned}$$

untersucht. Wir setzen $b_K = \frac{\mu \alpha_K + \epsilon}{\sigma} \sqrt{KA(K)}$ und betrachten die momenterzeugende Funktion $\varphi_K(\tau)$ der Zufallsvariablen $\frac{b_K}{a_K} \left(-\frac{S_{a_K} - a_K \mu}{\sigma} \right)$ für $\tau > 0$. Wegen der Voraussetzung (iv) von Satz 2B und $b_K/a_K \rightarrow 0$ existiert $\varphi_K(\tau)$ bei $\tau > 0$ für alle hinreichend großen K , und es gilt

$$\varphi_K(\tau) = \left\{ \varphi_1 \left(\frac{b_K}{a_K} \tau \right) \right\}^{a_K},$$

wobei φ_1 die momenterzeugende Funktion der Zufallsvariablen $Y_1 = -(X_1 - \mu)/\sigma$ bezeichnet. Wegen $EY_1 = 0$, $\text{Var}(Y_1) = 1$ liefert eine Taylorentwicklung von $\log \varphi_K$ und Grenzübergang $K \rightarrow \infty$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{a_K}{b_K^2} \log \varphi_K(\tau) = \frac{\tau^2}{2}.$$

Hieraus folgt über Lemma 3.1 sofort

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \left\{ P \left(\frac{b_K}{a_K} \left(-\frac{S_{a_K} - a_K \mu}{\sigma} \right) \geq \frac{b_K^2}{a_K} \right) \right\}^{a_K/b_K^2} = e^{-1/2}$$

und wegen $b_K^2/(a_K A(K)) \rightarrow (\mu \alpha + \epsilon)^2 \mu / \sigma^2$ somit

$$(3.17) \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \{P(S_{a_K} - a_K \mu \leq -(\mu \alpha_K + \varepsilon) \sqrt{KA(K)})\}^{1/A(K)} = \exp \left\{ -\frac{(\mu \alpha_K + \varepsilon)^2}{2\sigma^2} \mu \right\}.$$

Zur Untersuchung von $P(M_{a_K} - S_{a_K} \geq \varepsilon \sqrt{KA(K)})$ beachte man, daß $M_n - S_n$ verteilt ist wie die Wartezeit W_n eines $(n+1)$ -sten Kunden in einem Wartemodell G/G/1. Für $\tau \in (\tau_1, 0)$ mit $\varphi(\tau) < 1$ gilt daher (vgl. STEINEBACH (1976), S.33)

$$(3.18) \quad \limsup_{K \rightarrow \infty} \{P(M_{a_K} - S_{a_K} \geq \varepsilon \sqrt{KA(K)})\}^{1/\varepsilon \sqrt{KA(K)}} \leq e^\tau.$$

Da $\sqrt{KA(K)}/A(K) \rightarrow \infty$ ($K \rightarrow \infty$) folgt aus (3.16) - (3.18) und Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$

$$(3.19) \quad \liminf_{K \rightarrow \infty} \{P(L(K) \geq \frac{K}{\mu} + \alpha_K \sqrt{KA(K)})\}^{1/A(K)} \geq \exp \left(-\frac{\alpha^2 \mu^3}{2\sigma^2} \right).$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} (3.20) \quad & P(L(K) \geq \frac{K}{\mu} + \alpha \sqrt{KA(K)}) \leq P(L(K) \geq a_K) \\ & = P(M_{a_K-1} \leq K) \leq P(S_{a_K-1} \leq K) \\ & = P(S_{a_K-1} - (a_K-1)\mu \leq K - (a_K-1)\mu) \\ & \leq P(S_{a_K-1} - (a_K-1)\mu \leq -(\alpha \sqrt{KA(K)} - 2)\mu). \end{aligned}$$

Mit den zum Nachweis von (3.17) benutzten Methoden zeigt man auch hier

$$(3.21) \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \{P(S_{a_K-1} - (a_K-1)\mu \leq -(\alpha \sqrt{KA(K)} - 2)\mu)\}^{1/A(K)} = \exp \left(-\frac{\alpha^2 \mu^3}{2\sigma^2} \right).$$

(3.20) und (3.21) liefern somit

$$(3.22) \quad \limsup_{K \rightarrow \infty} \{ P(L(K) \geq \frac{K}{\mu} + \alpha \sqrt{KA(K)}) \}^{1/A(K)} \leq \exp \left(- \frac{\alpha^2 \mu^3}{2 \sigma^2} \right).$$

Mit (3.19) und (3.22) ist die zweite Gleichung in (3B) bewiesen. Zum Nachweis der ersten Gleichung verfährt man wie im Beweis von Hilfssatz 3A. $\square$

3C.Hilfssatz. Es sei $\{A(K)\}_{K \in (0, \infty)}$ eine Familie reeller Zahlen mit $A(K)/K \rightarrow \infty$ ($K \rightarrow \infty$). Unter den Voraussetzungen von Satz 2C gelten dann für jede Familie $\{\alpha_K\}_{K \in (0, \infty)}$ reeller Zahlen mit $\alpha_K \rightarrow \alpha > 0$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} (3C) \quad & \lim_{K \rightarrow \infty} \{ P(N(K) - N(0) \geq \alpha_K A(K)) \}^{1/A(K)} \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \{ P(N(K) \geq \alpha_K A(K)) \}^{1/A(K)} \\ &= \{ \inf_{\tau} \varphi(\tau) \}^{\alpha} = \rho^{\alpha} = \rho(\alpha). \end{aligned}$$

Zum Beweis benötigen wir noch das folgende Ergebnis:

3.4. Lemma. Unter den Voraussetzungen von Satz 2C gilt für jedes $x > 0$

$$(3.23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{ P(M_n \leq x) \}^{1/n} = \varphi(\tau_0) = \rho.$$

Beweis. Für $0 < \delta < EX_1$ sei $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine von $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängige Folge von iid Zufallsvariablen mit $R(0, \delta)$ -Verteilungen. Die Folgen $\{X_i + Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ bzw. $\{X_i - Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ erfüllen dann die Voraussetzungen des Theorems B in VERAVERBEKE und TEUGELS (1976), woraus folgt:

$$(3.24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{P(M_n^\delta \leq x)\}^{1/n} = \inf_{\tau} \varphi_\delta(\tau) = \rho_\delta$$

$$(3.25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{P(M_n^{-\delta} \leq x)\}^{1/n} = \inf_{\tau} \varphi_{-\delta}(\tau) = \rho_{-\delta}.$$

Hierbei ist $\varphi_\delta(\tau) = E \exp \tau(X_1 + Y_1) = \varphi(\tau) (e^{\tau\delta} - 1)/\tau\delta$ bzw.

$\varphi_{-\delta}(\tau) = \varphi(\tau) (e^{-\tau\delta} - 1)/(-\tau\delta)$ und M_n^δ bzw. $M_n^{-\delta}$ bezeichnen die Maxima der Partialsummen der Folgen $\{X_i + Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ bzw. $\{X_i - Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Wegen $Y_i \geq 0$ ($i \in \mathbb{N}$) gilt noch

$$P(M_n^\delta \leq x) \leq P(M_n \leq x) \leq P(M_n^{-\delta} \leq x),$$

so daß aus (3.24) und (3.25) nach Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$ die Behauptung (3.23) folgt. $\square$

Beweis von Hilfssatz 3C. Wir führen den Beweis auch hier für $L(K) - L(O)$ bzw. $L(K)$. Mit $a_K = [\alpha_K A(K)]$ erhält man

$$\begin{aligned} P(L(K) \geq \alpha_K A(K)) &\leq P(L(K) \geq a_K) \\ &= P(M_{a_K-1} \leq K) \leq P(S_{a_K-1} \leq K) \leq \{\varphi(\tau)\}^{a_K-1} e^{-\tau K}, \end{aligned}$$

falls $\tau < 0$. Wählt man $\tau = \tau_0$ und beachtet $K/A(K) \rightarrow 0$, $a_K/A(K) \rightarrow \alpha$ ($K \rightarrow \infty$), so folgt sofort

$$(3.26) \quad \limsup_{K \rightarrow \infty} \{P(L(K) \geq \alpha_K A(K))\}^{1/A(K)} \leq \varphi^\alpha(\tau_0) = \rho^\alpha.$$

Ferner gilt für festes x mit $0 < x \leq K$

$$\begin{aligned} P(L(K) \geq \alpha_K A(K)) &\geq P(L(K) \geq a_K + 1) \\ &= P(M_{a_K} \leq K) \geq P(M_{a_K} \leq x), \end{aligned}$$

woraus mit Lemma 3.4 und $a_K/A(K) \rightarrow \alpha$ folgt

$$(3.27) \quad \liminf_{K \rightarrow \infty} \{P(L(K) \geq \alpha_K A(K))\}^{1/A(K)} \geq \rho^\alpha.$$

Mit (3.26) und (3.27) ist die zweite Gleichung in (3C) bewiesen.
Die erste Gleichung erhält man wieder analog zum Beweis von
Hilfssatz 3A. $\square$

§ 4. Beweise der Ergebnisse aus § 2

Wesentliches Hilfsmittel in den Beweisen wird die Unabhängigkeit des verallgemeinerten Erneuerungsprozesses zwischen den 'Erneuerungszeitpunkten' sein. Dazu definieren wir mit $K=K(T)$ rekursiv die folgenden Hilfsvariablen:

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} t_0 &= 0 \\ L_{0,0} &= \text{Erstaustrittszeit aus } (-\infty, t_0] = L(0) \\ L_{0,K} &= \text{Erstaustrittszeit aus } (-\infty, t_0+K] = L(K) \\ &\text{sowie für } i = 1, 2, \dots \\ t_i &= S_{L_{i-1}, K} \\ L_{i,0} &= \text{Erstaustrittszeit aus } (-\infty, t_i] = L(t_i) \\ L_{i,K} &= \text{Erstaustrittszeit aus } (-\infty, t_i+K] = L(t_i+K) . \end{array} \right.$$

Es gilt das folgende Lemma:

4.1. Lemma. a) Die Zufallsvariablen $L_{i,K} - L_{i,0}$, $i=0,1,2,\dots$, sind iid mit derselben Verteilung wie $L(K) - L(0)$.

b) Die Zufallsvariablen $V_{i,K} = t_i - t_{i-1} - K$, $i=1,2,\dots$, sind iid mit derselben Verteilung wie $V_K = S_{L(K)} - K$.

c) $\sup_{K \geq 0} EV_{i,K} \leq \frac{E(X_1^+)^2}{\mu}$, $i = 1, 2, \dots$

d) $\sup_{K \geq 0} EV_{i,K}^2 \leq \frac{4}{3} \frac{E(X_1^+)^3}{\mu}$, $i = 1, 2, \dots$

e) Aus $E(X_1^+)^3 < \infty$ und $K = K_T = o(T^\delta) \forall \delta > 0$ folgt für

$$M = M_T = [\delta_1 T / K_T] \quad (0 < \delta_1 < 1) \quad \text{und} \quad M(T) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : t_n + K_{T+1} \leq T\},$$

$$T = 1, 2, \dots \quad \text{die Beziehung} \quad : \quad \sum_{T=1}^{\infty} P(M(T) < M_T) < \infty.$$

Beweis. a,b) Der Erneuerungsprozeß startet jeweils in den 'zufälligen' Zeitpunkten t_i unabhängig von der Vergangenheit. Die Behauptung folgt somit aus der Konstruktion der Zufallsvariablen t_i , $L_{i,0}$ und $L_{i,K}$.

c,d) Man vergleiche LORDEN (1970), Theorem 1 und 3.

e) Für T hinreichend groß gilt:

$$\begin{aligned} P(M(T) < M) &= P(t_{M+K_{T+1}} > T) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^M V_{i, K_T} + MK_T + K_{T+1} > T\right) \\ &\leq P\left(\sum_{i=1}^M V_{i, K_T} > \delta_2 T\right), \end{aligned}$$

wobei $0 < \delta_2 < 1$. Die Behauptung folgt dann analog zu den Überlegungen in STEINEBACH (1978b, Lemma 4.3) für den gewöhnlichen Erneuerungsprozeß. $\square$

Beweis von Satz 2A. a) Wir zeigen zuerst:

$$(4.2) \quad \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{D(T, K_T)}{K_T} \leq \alpha \text{ f.s. .}$$

Dazu betrachten wir für $\theta > 1$ die Folge $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ mit $T_j = \theta^j$.

Für $T_{j-1} \leq T \leq T_j$ und j hinreichend groß gilt

$$(4.3) \quad K_{T_{j-1}} \leq K_T \leq K_{T_j}, \text{ sowie}$$

$$\begin{aligned} (4.4) \quad D(T, K_T) &= \sup_{0 \leq t \leq T - K_T} (L(t + K_T) - L(t)) \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq [T_j] - 1} (L([t] + K_{T_j} + 1) - L([t])) =: D'(T_j, K_{T_j} + 1). \end{aligned}$$

(4.3) und (4.4) ergeben zusammen

$$(4.5) \quad \frac{D(T, K_T)}{K_T} \leq \frac{D'(T_j, K_{T_j} + 1)}{K_{T_{j-1}}}.$$

Voraussetzung (I2) liefert noch

$$\lim_{\theta \rightarrow 1} \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{K_{T_j} + 1}{K_{T_j - 1}} = 1 ,$$

so daß es wegen (4.5) zum Nachweis von (4.2) reicht zu zeigen:

$$(4.6) \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{D'(T_j, K_{T_j} + 1)}{K_{T_j} + 1} \leq \alpha \quad \text{f.s.}$$

Sei dazu $\alpha' = \alpha + \varepsilon \in \{(g(e^\xi))' : \xi \in (0, \log \frac{1}{\rho})\}$, $\varepsilon > 0$.

Mit $a'_j = [(K_{T_j} + 1)\alpha']$ gilt

$$\begin{aligned} (4.7) \quad & P(D'(T_j, K_{T_j} + 1) \geq (K_{T_j} + 1)\alpha') \leq P(D'(T_j, K_{T_j} + 1) \geq a'_j) \\ & \leq \sum_{[t]=0}^{[T_j]-1} P(L([t] + K_{T_j} + 1) - L([t]) \geq a'_j) \\ & = \sum_{[t]=0}^{[T_j]-1} P(S_L([t]), \dots, S_L([t]) + a'_j - 1 \leq [t] + K_{T_j} + 1) . \end{aligned}$$

Beachtet man, daß $S_L([t]) > [t]$ gilt, die X_i iid sind und $\{L([t]) = v\} \in \mathcal{A}(X_1, \dots, X_v)$ ist, so läßt sich (4.7) weiter abschätzen durch

$$\begin{aligned} (4.8) \quad & \sum_{[t]=0}^{[T_j]-1} P(X_L([t]) + 1, \dots, X_L([t]) + 1 + \dots + X_L([t]) + a'_j - 1 \leq K_{T_j} + 1) \\ & = [T_j] P(X_1, \dots, X_1 + \dots + X_{a'_j - 1} \leq K_{T_j} + 1) \\ & = [T_j] P(L(K_{T_j} + 1) \geq a'_j) = [T_j] P(L(K_{T_j} + 1) \geq [(K_{T_j} + 1)\alpha']) . \end{aligned}$$

Für alle hinreichend großen j gilt auf Grund von Hilfssatz 3A

$$(4.9) \quad P(L(K_{T_j}+1) \geq [(K_{T_j}+1)\alpha']) \leq \rho'^{K_{T_j}+1},$$

wobei $\rho(\alpha) > \rho' > \rho(\alpha')$ (vgl. Lemma 2.2b), etwa $\rho' = \exp(-1/C')$ mit $C(\alpha) > C' > C(\alpha')$. Nun ist

$$K_{T_j}+1 \sim C(\alpha) \log \theta^j + 1 \sim jC(\alpha) \log \theta$$

und folglich für hinreichend große j

$$(4.10) \quad [T_j] \rho'^{K_{T_j}+1} \leq \theta^{-j\beta}$$

für ein $\beta > 0$. Wegen $\theta > 1$ folgt aus (4.7) - (4.10)

$$(4.11) \quad \sum_{j=1}^{\infty} P(D'(T_j, K_{T_j}+1) \geq (K_{T_j}+1)\alpha') < \infty$$

Mit dem Lemma von BOREL-CANTELLI liefert (4.11)

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{D'(T_j, K_{T_j}+1)}{K_{T_j}+1} \leq \alpha' \quad \text{f.s.},$$

und somit (4.6) nach Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$.

b) Zu zeigen ist noch:

$$(4.12) \quad \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{D(T, K_T)}{K_T} \geq \alpha \quad \text{f.s.}$$

Wegen $[T] \leq T < [T]+1$ und der Isotonie von K_T (vgl. (I1)) gilt:

$$(4.13) \quad \begin{aligned} D(T, K_T) &= \sup_{0 \leq t \leq T-K_T} (L(t+K_T) - L(t)) \\ &\geq \sup_{0 \leq t \leq [T]-K_{[T]}+1} (L(t+K_{[T]}) - L(t)) =: D''([T], K_{[T]}) \end{aligned}$$

Da $K_{[T]}/K_T \rightarrow 1$ ($T \rightarrow \infty$) (vgl. (1.10)), reicht es zum Nachweis

von (4.12) zu zeigen, daß für ganzzahlige T-Werte gilt:

$$(4.14) \quad \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{D''(T, K_T)}{K_T} \geq \alpha \text{ f.s. .}$$

Sei dazu $\alpha'' = \alpha - \varepsilon \in \{ (g(e^\xi))' : \xi \in (0, \log \frac{1}{\rho}) \}$, $\varepsilon > 0$, und t_i , $M(T)$ und M wie in (4.1) bzw. Lemma 4.1 definiert. Dann gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} (4.15) \quad & P(D''(T, K_T) < K_T \alpha'') \\ & \leq P\left(\max_{i=0,1,\dots,M(T)} (L(t_i + K_T) - L(t_i)) < K_T \alpha''\right) \\ & \leq P\left(\max_{i=0,1,\dots,M} (L(t_i + K_T) - L(t_i)) < K_T \alpha''\right) + P(M(T) < M). \end{aligned}$$

Wegen Lemma 4.1a) und Hilfssatz 3A erhält man weiter

$$\begin{aligned} (4.16) \quad & P\left(\max_{i=0,1,\dots,M} (L(t_i + K_T) - L(t_i)) < K_T \alpha''\right) \\ & = \{1 - P(L(K_T) - L(0) \geq K_T \alpha'')\}^{M+1} \\ & \leq (1 - \rho^{K_T})^{M+1} \leq \exp\{-(M+1) \rho^{K_T}\}, \end{aligned}$$

wobei $\rho(\alpha'') > \rho > \rho(\alpha)$, etwa $\rho'' = \exp(-1/C'')$ mit $C(\alpha'') > C'' > C(\alpha)$.

Nun gilt wegen $K_T \sim C(\alpha) \log T$

$$(4.17) \quad \rho^{K_T} = \exp(-K_T/C'') \geq T^{-(1-2\gamma)}$$

für ein $\gamma > 0$ und alle hinreichend großen T. Ferner ist

$$(4.18) \quad M+1 = [\delta_1 T / K_T] \geq T^{1-\gamma}$$

für große T auf Grund von (I2). Aus (4.16) - (4.18) folgt

$$(4.19) \quad \sum_{T=T_1}^{\infty} P\left(\max_{i=0,1,\dots,M} (L(t_i+K_T) - L(t_i)) \leq K_T \alpha''\right) \leq \sum_{T=T_1}^{\infty} \exp(-T^{\gamma}) < \infty.$$

für ein T_1 . Lemma 4.1e) liefert noch

$$(4.20) \quad \sum_{T=1}^{\infty} P(M(T) < M) < \infty.$$

Aus (4.19) und (4.20) erhält man wegen (4.14)

$$\sum_{T=1}^{\infty} P(D''(T, K_T) \leq K_T \alpha'') < \infty,$$

woraus mit dem Lemma von BOREL-CANTELLI (4.14) folgt, wenn man noch den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ durchführt. (4.14) ist aber hinreichend zum Nachweis von (4.12). Mit (4.2) und (4.12) ist der Beweis von Satz 2A vollständig. $\square$

Unter Zuhilfenahme der Hilfssätze 3B und 3C verlaufen die Beweise der Sätze 2B und 2C ähnlich zu dem Beweis von Satz 2A. Lediglich der Teil a) des Beweises von Satz 2B ist etwas zu variieren.

Beweis von Satz 2B. a) Wir zeigen auch hier zuerst

$$(4.21) \quad \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{D(T, K_T) - K_T/\mu}{\sqrt{K_T \log T}} \leq \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\mu^3}} \quad \text{f.s.}$$

Dazu definieren wir eine Folge $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ durch $T_j = \sup\{T \in \mathbb{R} : K_T \leq j\}$,

was wegen (I1) für alle hinreichend großen j möglich ist. Es ist $K_{T_j} = j$ und für $T_{j-1} \leq T \leq T_j$ gilt wie in (4.4)

$$D(T, K_T) \leq D'(T_j, K_{T_j} + 1) = D'(T_j, j+1) \leq D'(T_{j+1}, j+1),$$

woraus weiter folgt

$$\frac{D(T, K_T) - K_T/\mu}{\sqrt{K_T \log T}} \leq \frac{D'(T_{j+1}, j+1) - (j+1)/\mu}{\sqrt{(j+1) \log T_{j+1}}} \sqrt{\frac{(j+1) \log T_{j+1}}{(j-1) \log T_{j-1}}} + \frac{2/\mu}{\sqrt{(j-1) \log T_{j-1}}}.$$

Aus (I3) und (1.11) erhält man

$$\sqrt{\frac{(j+1) \log T_{j+1}}{(j-1) \log T_{j-1}}} \rightarrow 1 \quad \text{und} \quad \frac{2/\mu}{\sqrt{(j-1) \log T_{j-1}}} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty),$$

so daß es genügt zu zeigen

$$(4.22) \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{D'(T_j, j) - j/\mu}{\sqrt{j \log T_j}} \leq \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\mu^3}} \quad \text{f.s. .}$$

Wegen $\log T_j \rightarrow \infty$ und $\log T_j/j \rightarrow 0$ (vgl. (1.11) und (1.12)) ist Hilfssatz 3B anwendbar. Mit dessen Hilfe und denselben Überlegungen wie im Beweis von Satz 2A zeigt man auch hier für $\alpha' > \alpha = \sqrt{2\sigma^2/\mu^3}$ die Ungleichung

$$(4.23) \quad P(D'(T_j, j) - \frac{j}{\mu} \geq \alpha' \sqrt{j \log T_j}) \leq T_j \rho^{\log T_j},$$

wobei $\rho(\alpha) = \exp(-\alpha^2 \mu^3 / 2\sigma^2) > \rho' > \exp(-\alpha'^2 \mu^3 / 2\sigma^2) = \rho(\alpha')$.
Wegen $\alpha' > \alpha = \sqrt{2\sigma^2/\mu^3}$ ist $\alpha'^2 \mu^3 / 2\sigma^2 > 1$ und folglich

$$(4.24) \quad T_j \rho^{\log T_j} \sim T_j^{-\beta}$$

für ein $\beta > 0$. Aus $\log T_j / \log j \rightarrow +\infty$ (vgl. (1.11)) folgt noch für jedes $B > 0$ und alle hinreichend großen j

$$(4.25) \quad T_j \geq j^B.$$

Bei Wahl von B derart, daß $B\beta > 1$ gilt, liefern (4.23) - (4.25) somit

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(D'(T_j, j) - \frac{j}{\mu} \geq \alpha' \sqrt{j \log T_j}) < \infty,$$

woraus mit dem Lemma von BOREL-CANTELLI und $\alpha' \rightarrow \alpha$ (4.22) und damit auch (4.21) folgt.

b) Zum Nachweis von

$$(4.26) \quad \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{D(T, K_T) - K_T / \mu}{\sqrt{K_T \log T}} \geq \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\mu^3}} \quad \text{f.s.}$$

schätzen wir wie in (4.13) ab:

$$\begin{aligned} & \frac{D(T, K_T) - K_T / \mu}{\sqrt{K_T \log T}} \\ & \geq \frac{D''([T], K_{[T]}) - K_{[T]} / \mu}{\sqrt{K_{[T]} \log [T]}} \sqrt{\frac{K_{[T]} \log [T]}{K_T \log T}} - \frac{(K_T - K_{[T]}) / \mu}{\sqrt{K_T \log T}}. \end{aligned}$$

Da wegen (1.9) und (1.10) gilt

$$\sqrt{\frac{K_{[T]} \log [T]}{K_T \log T}} \rightarrow 1 \quad \text{und} \quad \frac{(K_T - K_{[T]}) / \mu}{\sqrt{K_T \log T}} \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty),$$

genügt es auch hier für ganzzahlige T-Werte zu zeigen

$$(4.27) \quad \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{D''(T, K_T) - K_T / \mu}{\sqrt{K_T \log T}} \geq \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\mu^3}} \quad \text{f.s.}$$

(4.27) - und damit (4.26) - erhält man unter Zuhilfenahme von Hilfssatz 3B analog zum Beweis von Satz 2A. $\square$

Beweis von Satz 2C. Der Beweis entspricht dem Beweis von Satz 2A. Bei der Abschätzung von $P(L(K) - L(O) \geq \alpha \log T)$, $\alpha = 1/\log(1/\rho)$, in den zu (4.9) und (4.16) analogen Beziehungen ist lediglich statt des Hilfssatzes 3A hier der Hilfssatz 3C anzuwenden, was wegen $A(K_T)/K_T = \log T/K_T \rightarrow \infty (T \rightarrow \infty)$ zulässig ist. $\square$

II. ERDÖS-RÉNYI-Zuwächse von Partialsummenprozessen mit

mehrdimensionalen Indizes

§5 Vorbemerkungen und Definitionen

Betrachten wir zunächst eine d-parametrische BROWNsche Bewegung $\{W(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ auf einem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (vgl. CHAN (1976, 1977)). Dies bedeutet, $\{W(t)\}_{t \in [0, \infty)}^d$ ist ein separabler GAUSSscher Prozeß, der den folgenden Bedingungen genügt:

(5.1) $W(\cdot)$ ist f.s. stetig auf $[0, \infty)^d$.

(5.2) Für $t = (t_1 \dots t_d) \in [0, \infty)^d$ setze man $|t| = t_1 \dots t_d$. Dann ist $W(t) = 0$ f.s., falls $|t| = 0$, und $W(t)$ besitzt eine $N(0, |t|)$ -Verteilung, falls $|t| > 0$.

(5.3) $\{W(t)\}_{t \in [0, \infty)}^d$ besitzt unabhängige GAUSSsche Zuwächse im folgenden Sinne:

Für $s, t \in [0, \infty)^d$ mit $s < t$ (d.h. $s_i < t_i \forall i=1, \dots, d$) sei

$$W(s, t) = \sum_{\epsilon_i \in \{0, 1\}}^{(-1)^{\sum_{i=1}^d \epsilon_i}} W(\epsilon_1 s_1 + (1 - \epsilon_1) t_1, \dots, \epsilon_d s_d + (1 - \epsilon_d) t_d)$$

der 'Zuwachs' des Prozesses über dem (d-dimensionalen) Intervall $(s, t) = \{x \in [0, \infty)^d : s < x < t\}$.

Dann sind $W(s, t)$ und $W(s', t')$ unabhängige Zufallsvariable, falls $(s, t) \cap (s', t') = \emptyset$. Ferner besitzt $W(s, t)$ eine $N(0, |t-s|)$ -Verteilung.

CHAN (1976) hat bei der Untersuchung des LÉVY-Stetigkeitsmoduls dieser d-parametrischen BROWNschen Bewegung die Zuwächse $W(s, t)$ des Prozesses untersucht. Bevor wir auf die Ergebnisse eingehen, stellen wir die im folgenden benutzten Bezeichnungen

zusammen:

5.1. Bezeichnungen. Seien $s=(s_1, \dots, s_d)$, $t=(t_1, \dots, t_d) \in [0, \infty)^d$.

(5.4) $s \leq t$ ($s < t$) bedeutet $s_i \leq t_i$ ($s_i < t_i$) für alle $i=1, \dots, d$.

(5.5) $|t| = t_1 \dots t_d$.

(5.6) $s+t = (s_1+t_1, \dots, s_d+t_d)$.

(5.7) $(s, t) = \{x: s < x < t\}$, $[s, t) = \{x: s \leq x < t\}$,
 $[s, t] = \{x: s \leq x \leq t\}$.

(5.8) Für $T \in \mathbb{R}$ bezeichnet $\underline{T}$ den Vektor $(T, \dots, T) \in \mathbb{R}^d$.

CHAN hat nun u.a. folgendes Ergebnis erhalten:

5A. Satz (CHAN, 1976). Sei $\{a_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}^d$ mit

(V) $\lim_{N \rightarrow \infty} |a_N| / N^\delta = 0 \quad \forall \delta > 0$.

Dann gilt mit $n \in \mathbb{N}^d$ für jedes reelle $C > 0$ die Beziehung

(5) $\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq n \leq N - a_N} \frac{W(n, n+a_N)}{\sqrt{|a_N| [C \log N]}} = \sqrt{\frac{2d}{C}} \quad \text{f.s.}$

5.2. Bemerkung. Die Aussage (5) bleibt gültig, wenn $\max_{0 \leq n \leq N - a_N}$ ersetzt wird durch $\sup_{0 \leq x \leq N - a_N}$, wobei $x \in \mathbb{R}^d$.

5.3. Korollar. Falls gilt

(VA) $\lim_{N \rightarrow \infty} |a_N| / \log N = C > 0$,

erhält man aus (5)

$$(5A) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq n \leq N - a_N} \frac{W(n, n + a_N)}{|a_N|} = \sqrt{\frac{2d}{C}} \quad \text{f.s.}$$

Aus der Eigenschaft (5.3) der d-parametrischen BROWNSchen Bewegung folgt mit $j \in \mathbb{N}^d$ für $m, n \in \mathbb{N}_0^d$ die Darstellung

$$(5.9) \quad W(m, n) = \sum_{m < j \leq n} W(j-1, j) ,$$

wobei die $W(j-1, j)$ eine $N(0, 1)$ -Verteilung besitzen.

Ist daher $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^d}$ eine Familie von iid Zufallsvariablen auf $\mathbb{N}^d$ mit $N(0, 1)$ -Verteilung und definiert man

$$(5.10) \quad S(m, n) = \sum_{m < j \leq n} X_j$$

als 'Zuwächse' des Partialsummenprozesses $\{S(n)\}_{n \in \mathbb{N}^d}$,

$S(n) = \sum_{j \leq n} X_j$, über dem (d-dimensionalen) Intervall $(m, n]$,

so kann wegen (5.9) und (5.10) die Aussage (5) umformuliert werden zu

$$(5') \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq n \leq N - a_N} \frac{S(n, n + a_N)}{\sqrt{|a_N| [C \log N]}} = \sqrt{\frac{2d}{C}} \quad \text{f.s.}$$

5.4. Bemerkung. Für $d=1$ und $a_N / \log N \rightarrow C > 0$ ($N \rightarrow \infty$) liefert (5') das Gesetz der großen Zahlen von ERDÖS und RÉNYI (vgl. §0, Satz A und Beziehung (10)) für $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariable.

In den folgenden Paragraphen werden Aussagen der Form (5') für Familien $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^d}$ von iid Zufallsvariablen hergeleitet, die nicht notwendig $N(0, 1)$ -Verteilungen besitzen. Die Ergebnisse verallgemeinern damit die Sätze A - C der Einleitung auf Familien mit mehrdimensionalen Indizes bzw. erweitern den

Satz 5A von CHAN auf Familien mit anderen Verteilungen. Eine Reihe anderer Grenzwertsätze für derartige Familien $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^d}$ mit mehrdimensionalen Indizes findet man z.B. bei SMYTHE (1974) und GUT (1978).

Es werden noch die folgenden Bezeichnungen benötigt:

5.5. Bezeichnungen. Seien $k, K \in \mathbb{N}$, $m, n \in \mathbb{N}_0^d$. Wir setzen

$$(5.11) \quad d(k) = \text{card}\{n \in \mathbb{N}^d : |n| = k\}$$

$$(5.12) \quad M(K) = \sum_{k=1}^K d(k)$$

(5.13) Mit J sind stets Durchschnitte halboffener Intervalle mit dem Gitter $\mathbb{N}^d$ bezeichnet, also
 $J = (m, n] \cap \mathbb{N}^d = \{j \in \mathbb{N}^d : m < j \leq n\}$.

$$(5.14) \quad |J| = \text{card } J = |n-m|.$$

Im folgenden ist $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^d}$ eine Familie von iid Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

$$(i^*) \quad EX_1 = 0,$$

$$(ii^*) \quad \text{Var}(X_1) = 1.$$

Für $n \in \mathbb{N}^d$ und J wie in (5.13) setzen wir $S(n) = \sum_{j \leq n} X_j$ und $S(J) = \sum_{j \in J} X_j$ und definieren:

5.6. Definition. a) Für $N, K \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq K \leq N^d$ heißt die Zufallsvariable

$$(5.15) \quad D(N, K) = \max_{\substack{J \subset (0, N] \\ |J| \leq K}} S(J)$$

ERDÖS-RÉNYI (E-R)-Zuwachs des Partialsummenprozesses $\{S(n)\}_{n \in \mathbb{N}^d}$

in $(0, N]$ über Teilintervallen mit maximaler Größe K .

b) Entsprechend heißt

$$(5.16) \quad D^*(N, K) = \max_{\substack{J \subset (0, N] \\ |J| = K}} S(J)$$

E-R-Zuwachs von $\{S(n)\}_{n \in \mathbb{N}^d}$ über Teilintervallen der Größe K .

Beim asymptotischen Verhalten für $N \rightarrow \infty$ von E-R-Zuwächsen $D(N, K_N)$ des Prozesses $\{S(n)\}_{n \in \mathbb{N}^d}$ gibt es auch hier drei wesentlich verschiedene Fälle für die Wahl der Folge $\{K_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, die die maximale Größe der Teilintervalle J festlegt, über denen 'Zuwächse' des Prozesses untersucht werden, nämlich

$$(VA) \quad K_N / \log N \rightarrow C \in \mathbb{R}_+ \quad (N \rightarrow \infty)$$

$$(VB) \quad K_N / \log N \rightarrow \infty \quad (N \rightarrow \infty)$$

$$(VC) \quad K_N / \log N \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

Folgende Bedingungen an $\{K_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ werden von Bedeutung sein:

$$(V1) \quad K_N \text{ ist isoton.}$$

$$(V2) \quad K_N / N^\delta \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad \forall \delta > 0 \text{ und diese Konvergenz ist antiton für ein } \delta_0 > 0.$$

§ 6. Ergebnisse

Nach den in § 5 gemachten Vorbemerkungen können wir nun die Hauptergebnisse dieses Kapitels formulieren:

6A. Satz. Außer den Voraussetzungen (i*) und (ii*) gelte noch (iii*) $\varphi(\tau) = E \exp(\tau X_1) < \infty$, $\tau \in [0, \tau_0)$, $\tau_0 > 0$.

Für $\alpha \in \{\varphi'(\tau)/\varphi(\tau) : \tau \in (0, \tau_0)\}$ sei $C = C(\alpha)$ derart, daß $\exp(-d/C) = \inf_{\tau} \varphi(\tau) \exp(-\tau\alpha) = \rho(\alpha)$.

Ferner sei $\{K_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen, die den Bedingungen (V1), (V2) und (VA) genügt mit $C = C(\alpha)$.

Dann gilt mit Bezeichnung (5.15)

$$(6A) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D(N, K_N)}{\sqrt{K_N [\text{Clog } N]}} = \alpha \quad \text{f.s.}.$$

6.1. Bemerkung. Wegen $K_N/\log N \rightarrow C$ kann die Normierungskonstante $\sqrt{K_N [\text{Clog } N]}$ in (6A) durch K_N ersetzt werden.

6.2. Bemerkung. Der Beweis zeigt, daß $D(N, K_N)$ in (6A) durch $D^*(N, K_N)$ ersetzt werden kann.

6B. Satz. Außer den Voraussetzungen (i*) und (ii*) gelte auch hier

(iii*) $\varphi(\tau) = E \exp(\tau X_1) < \infty$, $\tau \in [0, \tau_0)$, $\tau_0 > 0$ beliebig klein.

Ferner sei $\{K_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen, die den Bedingungen (V1), (V2) und (VB) genügt.

Dann gilt für jede Konstante $C > 0$

$$(6B) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D(N, K_N)}{\sqrt{K_N} [C \log N]} = \sqrt{\frac{2d}{C}} \quad \text{f.s.} ,$$

wobei wieder $D(N, K_N)$ durch $D^*(N, K_N)$ ersetzt werden kann.

6C. Satz. Außer den Voraussetzungen (i*) und (ii*) gelte noch

(iii*) $\varphi(\tau) = E \exp(\tau X_1) < \infty \quad \forall \tau > 0$, und

(iv*) $(\log \varphi(\tau))^n \rightarrow \sigma_0^2 > 0 \quad (\tau \rightarrow \infty)$.

Ferner sei $\{K_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen, die den Bedingungen (V1), (V2) und (VC) genügt.

Dann gilt für jede Konstante $C > 0$

$$(6C) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D(N, K_N)}{\sqrt{K_N} [C \log N]} = \sqrt{\frac{2d\sigma_0^2}{C}} \quad \text{f.s.} ,$$

und es kann wieder $D(N, K_N)$ durch $D^*(N, K_N)$ ersetzt werden.

6.3. Bemerkung. Sind die Zufallsvariablen X_n unabhängig, identisch $N(0,1)$ -verteilt, so erhält man (vgl. § 0, Anwendung 2)

$\varphi(\tau) = \exp(\tau^2/2)$, $\rho(\alpha) = \exp(-\alpha^2/2)$, $(\log \varphi(\tau))^n = 1$,

also $\sigma_0^2 = 1$ und wegen $\exp(-d/C) = \rho(\alpha)$ noch $\alpha = \sqrt{2d/C}$.

Hier stimmen also die Aussagen (6A) - (6C) überein und liefern eine erweiterte Version des Satzes 5A von CHAN.

§ 7. Hilfssätze

Die Sätze 6A - 6C basieren auf den folgenden Hilfssätzen:

7A. Hilfssatz. a) Die Familie $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^d}$ erfülle die Voraussetzungen von Satz 6A. Außerdem genüge die Folge $\{K_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ den Bedingungen (V1), (V2) und (VA) mit einer beliebigen Konstanten $C > 0$. Dann gilt für $\alpha_N \rightarrow \alpha \in \{\varphi'(\tau)/\varphi(\tau) : \tau \in (0, \tau_0)\}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} (7A) \quad & \lim_{N \rightarrow \infty} \{P(\max_{|n| \leq K_N} S(n) \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha_N)\}^{1/[C \log N]} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \{P(S(K_N, 1, \dots, 1) \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha_N)\}^{1/[C \log N]} \\ &= \inf_{\tau} \varphi(\tau) \exp(-\tau \alpha) = \rho(\alpha). \end{aligned}$$

b) Ferner gelten für $\alpha'' < \alpha < \alpha'$ mit $\alpha', \alpha'' \in \{\varphi'(\tau)/\varphi(\tau) : \tau \in (0, \tau_0)\}$, $C = C(\alpha)$ derart, daß $\exp(-d/C) = \rho(\alpha)$, und N hinreichend groß die Abschätzungen

$$(7.1) \quad N^d P(\max_{|n| \leq K_N} S(n) \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha') \leq N^{-\beta} \quad (\exists \beta > 0),$$

$$(7.2) \quad P(\max_{J \in \mathcal{J}} S(J) \leq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha'') \leq e^{-N^\gamma} \quad (\exists \gamma > 0),$$

wobei die Familie $\mathcal{J}$ von 'Intervallen' J definiert ist durch

$$(7.3) \quad \mathcal{J} = \left\{ J = (m, n] \cap \mathbb{N}^d : m_1 \in \{0, K_N, \dots, (\left\lfloor \frac{N}{K_N} \right\rfloor - 1) K_N\}, \right. \\ \left. n_1 = m_1 + K_N, m_i \in \{0, 1, \dots, N-1\}, n_i = m_i + 1, i = 2, \dots, d \right\}.$$

7.1. Bemerkung. Für die in (7.3) definierten 'Intervalle' J bzw. Familie $\mathcal{J}$ gilt:

$$(7.4) \quad |J| = K_N \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = K_N;$$

$$(7.5) \quad \text{card } \mathcal{J} = \left\lfloor \frac{N}{K_N} \right\rfloor \cdot N \cdot \dots \cdot N = \left\lfloor \frac{N}{K_N} \right\rfloor N^{d-1} \sim \frac{N^d}{K_N}.$$

7B. Hilfssatz. a) Unter den Voraussetzungen von Satz 6B gilt für jede Konstante $C > 0$ und $\alpha_N \rightarrow \alpha > 0$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
 (7B) \quad & \lim_{N \rightarrow \infty} \{ P(\max_{|n| \leq K_N} S(n) \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha_N) \}^{1/[C \log N]} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \{ P(S(K_N, 1, \dots, 1) \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha_N) \}^{1/[C \log N]} \\
 &= \exp(-\alpha^2/2) = \rho(\alpha) .
 \end{aligned}$$

b) Ferner gelten für $0 < C' < C < C''$ und N hinreichend groß die Abschätzungen

$$(7.6) \quad N^{\beta} P(\max_{|n| \leq K_N} S(n) \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \sqrt{\frac{2d}{C'}}) \leq N^{-\beta} \quad (\exists \beta > 0) ,$$

$$(7.7) \quad P(\max_{J \in \mathcal{J}} S(J) \leq \sqrt{K_N [C \log N]} \sqrt{\frac{2d}{C''}}) \leq e^{-N^{\gamma}} \quad (\exists \gamma > 0) ,$$

wobei J und $\mathcal{J}$ wie in (7.3) definiert sind.

7C. Hilfssatz. a) Unter den Voraussetzungen von Satz 7C gilt für jede Konstante $C > 0$ und $\alpha_N \rightarrow \alpha > 0$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
 (7C) \quad & \lim_{N \rightarrow \infty} \{ P(\max_{|n| \leq K_N} S(n) \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha_N) \}^{1/[C \log N]} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \{ P(S(K_N, 1, \dots, 1) \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha_N) \}^{1/[C \log N]} \\
 &= \exp(-\alpha^2/2\sigma_0^2) = \rho(\alpha) .
 \end{aligned}$$

b) Ferner gelten für $0 < C' < C < C''$ und N hinreichend groß die Abschätzungen

$$(7.8) \quad N^{\beta} P(\max_{|n| \leq K_N} S(n) \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \sqrt{\frac{2d\sigma_0^2}{C'}}) \leq N^{-\beta} \quad (\exists \beta > 0) ,$$

$$(7.9) \quad P(\max_{J \in \mathcal{J}} S(J) \leq \sqrt{K_N [C \log N]} \sqrt{\frac{2d\sigma_0^2}{C''}}) \leq e^{-N^{\gamma}} \quad (\exists \gamma > 0) ,$$

wobei J und $\mathcal{J}$ wie in (7.3) definiert sind.

Die Beweise der Hilfssätze nutzen aus, daß $S(n)$ eine Summe von iid Zufallsvariablen ist mit momenterzeugenden Funktionen φ und $\ln$ Summanden. Die Aussagen (7A) - (7C) lassen sich dann aus bekannten Ergebnissen über Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen (wie z.B. Lemma 3.1 für diskrete Parameter) ableiten. Wir geben die Beweise kurz an:

Beweis von Hilfssatz 7A. a) Für $\tau \in (0, \tau_0)$ gilt $\varphi(\tau) \geq 1$ und

$$\begin{aligned} (7.10) \quad & P\left(\max_{|n| \leq K_N} S(n) \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha_N\right) \\ & \leq \sum_{k=1}^{K_N} d(k) \{\varphi(\tau)\}^k \exp(-\tau \alpha_N \sqrt{K_N [C \log N]}) \\ & \leq M(K_N) \{\varphi(\tau)\}^{K_N} \exp(-\tau \alpha_N \sqrt{K_N [C \log N]}). \end{aligned}$$

Beachtet man, daß $1 \leq M(K_N) \leq K_N^d$ gilt (vgl. (5.11), (5.12)), so erhält man wegen (V2) noch

$$(7.11) \quad 0 \leq \frac{\log M(K_N)}{[C \log N]} \leq \frac{d \delta \log N}{[C \log N]} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0).$$

Aus (7.10) und (7.11) erhält man wegen $K_N / \log N \rightarrow C$

$$\begin{aligned} (7.12) \quad & \limsup_{N \rightarrow \infty} \{P(\max_{|n| \leq K_N} S(n) \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha_N)\}^{1/[C \log N]} \\ & \leq \varphi(\tau) \exp(-\tau \alpha), \end{aligned}$$

also eine Richtung in (7A), wenn man auf der rechten Seite von (7.12) noch zu inf übergeht. Zum Beweis der anderen Richtung beachte man, daß gilt

$$\begin{aligned} & P\left(\max_{|n| \leq K_N} S(n) \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha_N\right) \\ & \geq P(W_N \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha_N), \end{aligned}$$

wobei $W_N = S(K_N, 1, \dots, 1)$. Wegen $K_N / \log N \rightarrow C$ und

$$\varphi_N(\tau) = E \exp(\tau W_N) = \{\varphi(\tau)\}^{K_N}, \quad \tau \in (0, \tau_0),$$

folgt aus Lemma 3.1 (für diskrete Parameter)

$$(7.13) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \{P(W_N \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha_N)\}^{1/[C \log N]} \\ = \inf_{\tau} \varphi(\tau) \exp(-\tau \alpha) .$$

Mit (7.12) und (7.13) ist (7A) bewiesen.

b) Für $\alpha < \alpha'$ und N hinreichend groß folgt aus (7A)

$$N^d P(\max_{|n| \leq K_N} S(n) \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha') \leq N^d \rho^{C \log N} ,$$

wobei $\rho(\alpha) > \rho' > \rho(\alpha')$, also wegen $\rho(\alpha) = \exp(-d/C(\alpha))$ etwa $\rho' = \exp(-d/C')$ mit $C(\alpha) > C' > C(\alpha')$. Setzt man $\beta = d(\frac{C}{C'} - 1) (> 0)$, so ist (7.1) bewiesen.

Zum Nachweis von (7.2) beachte man, daß die 'Intervalle' J in $\mathcal{J}$ paarweise disjunkt und von derselben Mächtigkeit sind und somit die über ihnen definierten Zuwächse $S(J)$ unabhängig und identisch verteilt sind. Es gilt daher weiter

$$(7.14) \quad P(\max_{J \in \mathcal{J}} S(J) \leq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha_N) \\ = \left\{ P(S(K_N, 1, \dots, 1) \leq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha_N) \right\}^{\left[\frac{N}{K_N} \right] N^{d-1}} .$$

Für $\alpha'' < \alpha$ und N hinreichend groß folgt aus (7.13)

$$(7.15) \quad P(S(K_N, 1, \dots, 1) \leq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha_N) \\ \leq 1 - \rho^{N C \log N} \leq \exp(-\rho^{N C \log N}) ,$$

wobei $\rho(\alpha'') > \rho'' > \rho(\alpha)$, etwa $\rho'' = \exp(-d/C'')$ mit $C(\alpha'') > C'' > C(\alpha)$. Beachtet man für große N noch

$$(7.16) \quad \left[\frac{N}{K_N} \right] N^{d-1} \geq N^{d(1-\delta)} \quad (\delta > 0), \text{ sowie}$$

$$(7.17) \quad \rho^{nC \log N} = \exp\left(-\frac{dC}{C''} \log N\right) = N^{-dC/C''},$$

so folgt (7.2) aus (7.14) - (7.17), wenn man $\gamma = d(1 - \frac{C}{C''} - \delta)$ setzt und $\delta < 1 - \frac{C}{C''}$ wählt. $\square$

Beweis von Hilfssatz 7B. a) Für $\tau > 0$ und N hinreichend groß erhält man analog zu (7.10) die Abschätzung

$$\begin{aligned} (7.18) \quad & P\left(\max_{|n| \leq K_N} S(n) \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha_N\right) \\ &= P\left(\sqrt{\frac{[C \log N]}{K_N}} \max_{|n| \leq K_N} S(n) \geq [C \log N] \alpha_N\right) \\ &\leq M(K_N) \left\{ \varphi\left(\sqrt{\frac{[C \log N]}{K_N}} \tau\right) \right\}^{K_N} \exp(-\tau \alpha_N [C \log N]). \end{aligned}$$

Unter Beachtung von $\log N / K_N \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), $EX_1 = 0$, $\text{Var}(X_1) = 1$ liefert eine Taylorentwicklung von $\log \varphi(\tau)$ bei $\tau = 0$

$$(7.19) \quad \frac{K_N}{[C \log N]} \log \varphi\left(\sqrt{\frac{[C \log N]}{K_N}} \tau\right) \rightarrow \frac{\tau^2}{2} \quad (N \rightarrow \infty).$$

Aus (7.11), (7.18) und (7.19) folgt

$$\begin{aligned} (7.20) \quad & \limsup_{N \rightarrow \infty} \left\{ P\left(\max_{|n| \leq K_N} S(n) \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha_N\right) \right\}^{1/[C \log N]} \\ &\leq \exp\left(\frac{\tau^2}{2} - \tau \alpha\right), \end{aligned}$$

und damit eine Richtung in (7B), wenn man wieder auf der rechten Seite in (7.20) zu $\inf$ übergeht. Zum Beweis der anderen Richtung beachte man auch hier die Ungleichung

$$\begin{aligned} & P \left(\max_{|n| \leq K_N} S(n) \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha_N \right) \\ & \geq P \left(\sqrt{\frac{[C \log N]}{K_N}} W_N \geq [C \log N] \alpha_N \right) . \end{aligned}$$

Mit (7.19) und Lemma 3.1 erhält man

$$\begin{aligned} (7.21) \quad & \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ P \left(\sqrt{\frac{[C \log N]}{K_N}} W_N \geq [C \log N] \alpha_N \right) \right\}^{1/[C \log N]} \\ & = \inf_{\tau} \exp \left(\frac{\tau^2}{2} - \tau \alpha \right) = \exp \left(-\alpha^2/2 \right) . \end{aligned}$$

(7.20) und (7.21) liefern zusammen (7B).

b) Der Beweis von (7.6) und (7.7) verläuft analog zum Nachweis von (7.1) und (7.2), wenn man beachtet, daß für $\alpha = \sqrt{2d/C}$ auch hier gilt

$$(7.22) \quad \rho(\alpha) = \exp(-\alpha^2/2) = \exp(-d/C) . \quad \square$$

Beweis von Hilfssatz 7C. a) Die Ungleichung (7.18) gilt hier analog. Führt man die Taylorentwicklung von $\log \varphi(\tau)$ an einer beliebig großen Stelle τ_0 durch, so erhält man unter Beachtung von $\log N/K_N \rightarrow \infty$ ($N \rightarrow \infty$) und $(\log \varphi(\tau_N))'' \rightarrow \sigma_0^2 > 0$ ($\tau_N \rightarrow \infty$) die Beziehung

$$(7.23) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{K_N}{[C \log N]} \log \varphi \left(\sqrt{\frac{[C \log N]}{K_N}} \tau \right) = \frac{\tau^2 \sigma_0^2}{2} , \quad \tau > 0 .$$

Wie im Beweis von Hilfssatz 7B folgt hiermit

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{|n| \leq K_N} \{ P(S(n) \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha_N) \}^{1/[C \log N]} \\ & \leq \inf_{\tau} \exp \left(\frac{\tau^2 \sigma_0^2}{2} - \tau \alpha \right) = \exp \left(-\frac{\alpha^2}{2 \sigma_0^2} \right) . \end{aligned}$$

Der Rest des Beweises von (7C) stimmt mit den Ausführungen im Teil a) des Beweises von Hilfssatz 7B überein, wenn man nur beachtet, daß statt (7.19) hier (7.23) gilt.

b) Auch hier gelten die Überlegungen zu (7.6) und (7.7) analog, denn für $\alpha = \sqrt{2d\sigma_0^2/C}$ gilt wieder

$$\rho(\alpha) = \exp(-\alpha^2/2\sigma_0^2) = \exp(-d/C) . \quad \square$$

§ 8. Beweise der Ergebnisse aus § 6

Mit den Hilfssätzen 7A - 7C ist alle Vorarbeit zum Beweis der Sätze 6A - 6C geleistet.

Beweis von Satz 6A. a) Wir zeigen zuerst, daß gilt

$$(8.1) \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{D(N, K_N)}{\sqrt{K_N [C \log N]}} \leq \alpha \quad \text{f.s.} \quad .$$

Für $\theta > 1$ betrachten wir dazu die Folge $\{[\theta^j]\}_{j \in \mathbb{N}}$. Wegen

$$\begin{aligned} P(D(N, K_N) \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha') \\ \leq N^{\alpha'} P(\max_{|n| \leq K_N} S(n) \geq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha') \end{aligned}$$

folgt für $\alpha' > \alpha$ aus Hilfssatz 7A, (7.1), die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(D([\theta^j], K_{[\theta^j]}) \geq \sqrt{K_{[\theta^j]} [C \log [\theta^j]]} \alpha') \leq \text{const} \sum_{j=1}^{\infty} [\theta^j]^{-\beta}.$$

Die Reihe auf der rechten Seite ist für $\theta > 1$ endlich .

Das Lemma von BOREL-CANTELLI liefert daher

$$(8.2) \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{D([\theta^j], K_{[\theta^j]})}{\sqrt{K_{[\theta^j]} [C \log [\theta^j]]}} \leq \alpha' \quad \text{f.s.} \quad .$$

Für $[\theta^{j-1}] \leq N \leq [\theta^j]$ gilt wegen (V1) $K_{[\theta^{j-1}]} \leq K_N \leq K_{[\theta^j]}$ und

$$\begin{aligned} (8.3) \quad \frac{D(N, K_N)}{\sqrt{K_N [C \log N]}} &= \frac{1}{\sqrt{K_N [C \log N]}} \max_{\substack{J \subset (0, N] \\ |J| \leq K_N}} S(J) \\ &\leq \frac{D([\theta^j], K_{[\theta^j]})}{\sqrt{K_{[\theta^j]} [C \log [\theta^j]]}} \sqrt{\frac{K_{[\theta^j]} [C \log [\theta^j]]}{K_{[\theta^{j-1}]} [C \log [\theta^{j-1}]]}} \quad . \end{aligned}$$

Aus (V1) und (V2) folgt noch

$$(8.4) \quad 1 \leq \frac{K [\theta^j]}{[\theta^{j-1}]} \leq \frac{[\theta^j]^{\delta_0}}{[\theta^{j-1}]^{\delta_0}} \rightarrow 1 \quad (j \rightarrow \infty, \theta > 1).$$

(8.2) - (8.4) liefern zusammen

$$(8.5) \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{D(N, K_N)}{\sqrt{K_N [C \log N]}} \leq \alpha' \quad \text{f.s.}$$

Nach Grenzübergang $\alpha' \rightarrow \alpha$ folgt (8.1) sofort aus (8.5).

b) Es ist noch zu zeigen

$$(8.6) \quad \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{D(N, K_N)}{\sqrt{K_N [C \log N]}} \geq \alpha \quad \text{f.s.}$$

Sei dazu $\alpha'' < \alpha$ beliebig nahe bei α gewählt. Nach Definition der Familie $\mathcal{Y}$ in Hilfssatz 7A, (7.3), erhält man

$$(8.7) \quad \frac{D(N, K_N)}{\sqrt{K_N [C \log N]}} \geq \max_{J \in \mathcal{Y}} \frac{S(J)}{\sqrt{K_N [C \log N]}}.$$

Mit (7.2) erhält man daher

$$(8.8) \quad \sum_{N=1}^{\infty} P(D(N, K_N) \leq \sqrt{K_N [C \log N]} \alpha'') \leq \text{const} \sum_{N=1}^{\infty} e^{-N^{\gamma}},$$

wobei die Reihe auf der rechten Seite in (8.8) endlich ist. Das Lemma von BOREL-CANTELLI liefert somit

$$(8.9) \quad \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{D(N, K_N)}{\sqrt{K_N [C \log N]}} \geq \alpha'' \quad \text{f.s.}$$

Aus (8.9) folgt durch Grenzübergang $\alpha'' \rightarrow \alpha$ (8.6), womit der Beweis von Satz 6A vollständig ist. $\square$

Die Beweise der Sätze 6B und 6C werden analog zum Beweis von Satz 6A geführt, was aus der Ähnlichkeit der Hilfssätze 7A - 7C auch zu erwarten ist.

III. Schlußbemerkungen

§ 9. Zusammenfassung und Ausblicke

In Kapitel I der vorliegenden Arbeit wurden im Sinne der Definitionen 1.1 und 1.4 die ERDÖS-RÉNYI-Zuwächse eines verallgemeinerten Erneuerungsprozesses $\{N(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ untersucht, der über eine Folge $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von iid Zufallsvariablen mit $EX_i > 0$ definiert war. Ist $\{Y_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ zusätzlich eine Folge von iid Zufallsvariablen, die noch von $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängig ist, so läßt sich zu $\{N(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ durch die Festlegung

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j ,$$

wobei $\sum_{j=1}^0 Y_j = 0$ gesetzt wird, ein verallgemeinerter Kostenprozeß $\{Z(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ definieren. Vermutlich besitzen dann auch die ERDÖS-RÉNYI-Zuwächse des Prozesses $\{Z(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ bei geeigneter Normierung f.s. Grenzwerte analog zu den Sätzen 2A - 2C. Zumindest für den Fall $Y_j \geq 0$ läßt sich sofort ein Analogon zu Satz 2.1 bei STEINEBACH (1978 b) angeben. Im Fall möglicherweise negativer 'Kosten' Y_j wurden hierzu keine weiteren Untersuchungen durchgeführt. Ob noch allgemeinere Sekundärprozesse behandelbar sind, etwa im Sinne von TAKÁCS (1954, 1956) Prozesse $\{Z(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ mit

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} f(t - S_j, Y_j) ,$$

wobei f eine meßbare Funktion in beiden Variablen ist, bleibt ebenfalls offen.

In Kapitel II der Arbeit wurden - motiviert durch ein Ergebnis von CHAN (1976) für die BROWNSche Bewegung $\{W(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ mit mehrdimensionalem Parameter - im Sinne der Definition 5.6 die ERDÖS-RÉNYI-Zuwächse von Partialsummenprozessen $\{S(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit

mehrdimensionalen Indizes untersucht. CHAN (1977) hat noch die folgende Verallgemeinerung bewiesen:

9A. Satz (CHAN, 1977). Es sei $\{a_T\}_{T \in [0, \infty)}$ eine Familie von Vektoren in $[0, \infty)^d$, die den folgenden Bedingungen genügt:

(IX1) Die Komponenten $a_T^{(i)}$ von a_T sind stetige, isotone Abbildungen von $[0, \infty)$ nach $[0, \infty)$ mit $0 < a_T^{(i)} \leq T$, $i=1, \dots, d$;

(IX2) $a_T^{(i)}/T$ ist antiton ;

(IX3) $\lim_{T \rightarrow \infty} a_T^{(i)}/a_T^{(j)}$ existiert (kann ∞ sein) für alle $i, j=1, \dots, d$.

Mit $\underline{T} = (T, \dots, T) \in [0, \infty)^d$ gilt dann

$$(9A) \quad \limsup_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq \underline{T} - a_T} \frac{|W(t, t + a_T)|}{\sqrt{2|a_T| (\log(|\underline{T}|/|a_T|) + \log \log T)}} = 1 \quad \text{f.s.},$$

und im Fall

$$(IXA) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \log \frac{|\underline{T}|}{|a_T|} / \log \log T = \infty$$

kann in (9A) $\limsup_{T \rightarrow \infty}$ durch $\lim_{T \rightarrow \infty}$ ersetzt werden.

Der Satz 9A legt die Vermutung nahe, daß im Falle sehr großer Intervalle, etwa $K_N = O(N^\delta)$ für ein $\delta > 0$, bei der Untersuchung der ERDÖS-RÉNYI-Zuwächse $D(N, K_N)$ bzw. $D^*(N, K_N)$ des Partialsummenprozesses $\{S(n)\}_{n \in \mathbb{N}^d}$ statt $\sqrt{K_N [C \log N]}$ ein Normierungsfaktor der Form

$$\gamma_N = \sqrt{K_N [C \log (|\underline{N}|/K_N) + \log \log N]}$$

gewählt werden sollte, womit dann - angesichts von (9A) - etwa Aussagen der Form

$$(9.1) \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq n \leq \underline{N} - a_N} \frac{S(n, n + a_N)}{\gamma_N} = \alpha \quad \text{f.s.}$$

zu erwarten sind, falls die Folge $\{a_N\}_{N \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^d$ ähnlichen Bedingungen wie (IX1) - (IX3) genügt. Ist $a_N = \underline{N}$ zugelassen, so würde (9.1) wegen $K_N = |a_N| = |\underline{N}|$ ein Gesetz vom iterierten Logarithmus für den Prozeß $\{S(n)\}_{n \in \mathbb{N}^d}$ enthalten.

9.1. Bemerkung. Im Fall $K_N = o(N^\delta) \quad \forall \delta > 0$ sind die Normierungsfaktoren $\sqrt{K_N [C \log N]}$ und γ_N bis auf einen konstanten Faktor asymptotisch äquivalent.

Zum Problem der ERDÖS-RÉNYI-Zuwächse der BROWNSchen Bewegung über großen Intervallen beachte man auch die Arbeiten von BOOK und SHORE (1978) bzw. CSÁKI und RÉVÉSZ (1978).

Literatur

1. BÄRTFAI, P. (1966): Die Bestimmung der zu einem wiederkehrenden Prozeß gehörenden Verteilungsfunktion aus den mit Fehlern behafteten Daten einer einzigen Realisation. Studia Sci.Math.Hungar. 1, 161 - 168.
2. BÄRTFAI, P. (1977): On the multivariate CHERNOFF theorem. Math.Inst.Hungar.Acad.Sci. (Preprint).
3. BAUM, L.E., KATZ, M., READ, R.R. (1962): Exponential convergence rates for the law of large numbers. Trans. Amer.Math.Soc. 102, 187-199.
4. BOOK, S.A. (1973): The ERDÖS-RÉNYI new law of large numbers for weighted sums. Proc.Amer.Math.Soc. 38, 165-171.
5. BOOK, S.A. (1975 a): An extension of the ERDÖS-RÉNYI new law of large numbers. Proc.Amer.Math.Soc. 48, 438-446.
6. BOOK, S.A. (1975 b): A version of the ERDÖS-RÉNYI law of large numbers for independent random variables. Bull.Inst.Math.Acad.Sinica 3, 199-211.
7. BOOK, S.A. (1976): Large deviation probabilities and the ERDÖS-RÉNYI law of large numbers. Canad.J.Statist 4, 185-210.
8. BOOK, S.A., SHORE, T.R. (1978): On large intervals in the CSÖRGÖ-REVSZ theorem on increments of a WIENER process. Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw.Geb. 46, 1-11.
9. CHAN, A.H.C. (1976): ERDÖS-RÉNYI type modulus of continuity theorems for BROWNIAN sheets. Math.Ser.Carleton Univ. 142 (Preprint).
10. CHAN, A.H.C. (1977): On the increments of the multi-parameter WIENER and KIEFER processes. Carleton Math. Lecture Note 19, 36 Seiten.

11. CSÁKI, E., RÉVÉSZ, P. (1978): How big must be the increments of a WIENER process ? (Preprint).
12. CSÖRGÖ, M., CHAN, A.H.C. (1976): On the ERDÖS-RÉNYI increments and the P.LÉVY modulus of continuity of a KIEFER process. Lecture Notes Math. 566, 17-32.
13. CSÖRGÖ, S. (1977): ERDÖS-RÉNYI laws. (Preprint, erscheint in Ann.Statist.).
14. DEO, C.M. (1976): A note on ERDÖS-RÉNYI law of large numbers. Canad.Math.Bull. 19, 497-500.
15. ERDÖS, P., RÉNYI, A. (1970): On a new law of large numbers. J.Analyse Math. 23, 103-111.
16. GUT, A. (1978): MARCINKIEWICZ laws and convergence rates in the law of large numbers for random variables with multidimensional indices. Ann.Probability 6, 469-482.
17. HEYDE, C.C. (1967): Asymptotic renewal results for a natural generalization of classical renewal theory. J.Roy.Statist.Soc., Ser.B 29, 141-150.
18. LÉVY, P. (1937): Théorie de l'addition des variables aléatoires indépendantes, Gauthier-Villars, Paris.
19. LÖRDEN, G. (1970): On excess over the boundary. Ann.Math. Statist. 41, 520-527.
20. PETROV, V.V., ŠIROKOVA, I.V. (1973): The exponential rate of convergence in the law of large numbers. Vestnik Leningrad.Univ.No.7 Math.Meh.Astronom. Vyp.2, 155-157, 165.
21. PLACHKY, D., STEINEBACH, J. (1975): A theorem about probabilities of large deviations with an application to queuing theory. Period.Math.Hungar. 6, 343-345.
22. RÉNYI, A. (1962): A sztochasztikus geizir (Vortragsauszug). Publ.Math.Inst.Hung.Acad.Sci. 7, 643.

23. SMYTHE, R. (1974): Sums of independent random variables on partially ordered sets. Ann.Probability 2, 906-917.
24. STEINEBACH, J. (1976): Exponentielles Konvergenzverhalten von Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen. Dissertation, Universität Düsseldorf.
25. STEINEBACH, J. (1978 a): On a necessary condition for the ERDÖS-RÉNYI law of large numbers. Proc.Amer.Math.Soc. 68, 97-100.
26. STEINEBACH, J. (1978 b): A strong law of ERDÖS-RÉNYI type for cumulative processes in renewal theory. J.Appl.Prob. 15, 96-111.
27. TAKÁCS, L. (1954): On secondary processes generated by a POISSON process and their applications in physics. Acta Math.Acad.Sci.Hung. 5, 203-236
28. TAKÁCS, L. (1956): On secondary processes generated by re-current processes. Acta Math.Acad.Sci.Hung. 7, 17-29.
29. VERAVERBEKE, N., TEUGELS, J.L. (1976): The exponential rate of convergence of the distribution of the maximum of a random walk. Part II. J.Appl.Prob. 13, 733-740.

